MA1001: Introducción al Cálculo
Profesor : Roberto Cominetti (Sección 5)
Auxiliares : Flavio Guiñez & Andrés Zúñiga

# *Clase Auxiliar Extra:* Axioma del Supremo

*04 de Mayo de 2009*

**P1** Para los siguientes conjuntos encontrar, si es que existen: máximo, mínimo, supremo e ínfimo.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x \geq 0\}$.
b) $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| < 5\}$.

**P2** Pruebe que si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ son cjtos no vacíos y acotados superiormente, entonces también lo son $A \cup B$ y $A \cap B$.

**P3** Dados $a, b \in \mathbb{R}$, demuestre que : $a \leq b + \frac{1}{n}$ , $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \leq b$. Pruebe ahora la propiedad en general:

Dados $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $(\forall \varepsilon > 0)$ se cumple que $a \leq b + \varepsilon$ entonces $a \leq b$. ***<u>Hint</u>*** **:** Use la P7.

**P4** Sea $A \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$ conjunto acotado superiormente, y sea $c > 0$.
Pruebe que el conjunto $cA := \{c \cdot x / x \in A\}$ es acotado superiormente y que $sup(cA) = c \cdot sup(A)$.

**P5** Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}_0^+$ con $A, B \neq \emptyset$ y acotados superiormente. Si definimos el conjunto producto como sigue: $A \cdot B = AB := \{x \cdot y : x \in A,\ y \in B\}$, demuestre que $A \cdot B$ está acotado superiormente y que $sup(A \cdot B) = sup(A) \cdot sup(B)$.

**P6** Sea $A \subseteq \mathbb{R}_+$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Muestre que $sup(\sqrt{A}) = \sqrt{sup(A)}$ .
Donde $\sqrt{A} := \{\sqrt{x} : x \in A\}$.

**P7** Demuestre que $inf(\mathbb{R}_0^+) = 0$ y además que $inf(\mathbb{R}^+) = 0$.

**P8** Sea $A \subset \mathbb{R}_0^+$ un intervalo cerrado y acotado superiormente. Pruebe que si $M = max_{x \in A}\{x\}$ entonces $sup(A) = M$.

**P9** Sean $A$ y $B$ conjuntos acotados superiormente. Pruebe que lo siguiente siempre se cumple:

I) $sup(A \cup B) = max\{sup(A), sup(B)\}$.
II) $sup(A \cap B) \leq min\{sup(A), sup(B)\}$.

**Indicación**: Utilice la caracterización de supremo del P11.

<u>**Nota**</u>:

Observe que en pregunta 2 probó que $A \cup B$ y $A \cap B$ son acotados superiormente.
Con esto, las nociones de $sup(A \cup B)$ y $sup(A \cap B)$ están bien definidas.

**P10** Sean $S$ y $T$ dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ no vacíos y acotados, tal que se cumple: $(\forall x \in S)(\forall y \in T) : x \leq y$.

I) Pruebe que $sup(S) \leq inf(T)$

II) Pruebe que $sup(S) = inf(T) \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in S)(\exists y \in T) : y - x < \varepsilon$

**Indicación**: Utilice la caracterización de supremo e ínfimo del P11.

**P11** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ cjto no vacío y acotado superiormente. Sea $s \in \mathbb{R}$ una cota superior de A e i una cota inferior de A. Pruebe que:

$$(s \text{ es el supremo de } A) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tal que } s - \varepsilon \leq a)$$

$$(i \text{ es el infimo de } A) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tal que } a \leq i + \varepsilon)$$

**P12** Para los siguientes conjuntos de numeros reales, indique (si existen): El conjunto de cotas superiores e inferiores, máximos, mínimos, supremos e ínfimos.

$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \quad \Big| \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} \tag{1}$$

$$B = \{q \in \mathbb{Q} / \ 1 \leq q^2 \leq 2\} \tag{2}$$

**P13** Considere el conjunto J definido por:

$$J = \left\{\frac{1}{|n-m|} \text{ tales que } n, m \in \mathbb{N} \text{ y } n \neq m\right\}$$

- Pruebe que 1 es el máximo de J.
- Pruebe que 0 es el ínfimo de J. ***Indicación*:** Use la propiedad Arquimediana.

**P14** Sea $C = \left\{s + t \mid 0 \leq s < 1, \ 0 \leq t < 1\right\}$. Muestre que $sup(C)$ e $inf(C)$ existen y encuentre cuáles son sus valores. Determine además si $C$ tiene ínfimo.

**P15** Sea $a \in \mathbb{R}, \ a \neq 1$. Se define el conjunto $G_a = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x > 0 \ \text{ y } \ \frac{ax}{1+x} \geq 1\right\}$. Encontrar si es que existen: ínfimo, supremo, mínimo y máximo de $G_a$.

**P16** Definamos $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2 \quad \text{y} \quad \frac{nx^2 - 4}{|x| - 2} \geq 1\right\}$. Encuentre $s_n = sup(A_n)$. Determine además $s = inf\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$.