

Auxiliar Introducción al Cálculo

De todo un poco (preparación exámen)

Auxiliar: Flavio Guíñez A.

Problema 1.(geometría + función implícita).

Encuentre la(s) recta(s) normal(es) en el punto $x = \frac{1}{2}$ de la curva dada por

$$x - y^2 + 3y = 2 - x^2.$$

¿A qué curva corresponde?

Problema 2.(trigonometría).

Pruebe las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$

b) $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x).$

Problema 3.(supremo).

Encuentre ínf, sup, máx y mín de los siguientes conjuntos cuando corresponda:

a) $A = \{x : x^2 + x + 1 \geq 0\}.$

b) $B = \{x : x < 0 \text{ y } x^2 + x - 1 < 0\}.$

c) $C = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\right\}.$

Problema 4.(sucesiones monótonas).

Sean (x_n) e (y_n) sucesiones definidas por

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad \text{con } x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad \text{donde } 0 < a < b.$$

a) Pruebe que para todo n se tiene $y_n > x_n$.

b) Demuestre que (x_n) e (y_n) son monótona creciente y decreciente respectivamente.

c) Concluya que ambas son acotadas y calcule sus límites.

Problema 5.(asíntotas).

Encuentre el dominio y la asíntotas laterales y/u oblicuas de las siguientes funciones:

a) $e(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 + 5}{x^2 + 1}.$

b) $f(x) = \sqrt{(x+a)(x+b)} - x.$

c) $g(x) = \frac{(x+a)^{x+a} - x^x}{x^x \ln x}$ (respecto los valores posibles de $a \in \mathbb{R}$).

d) $h(x) = x - \ln(\cosh x).$

Problema 6.(continuidad y derivada).

Determine si es posible extender f en todo \mathbb{R} de tal forma de obtener una función continua en todo punto.

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}.$$

Estudie la derivada de f [Hint: límites y derivadas laterales].

Problema 7.(L'Hôpital).

Calcule los siguientes límites:

1. (0/0)

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{\tan x - \arcsin x}.$$

2. (∞/∞)

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x+1}} \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}$$

3. ($0 \cdot \infty$ y $\infty - \infty$)

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x \quad b) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan^2 x \cdot (\sin x - 1) \quad c) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

4. (∞^0 , 0^0 y 1^∞)

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(1+x)]^x \quad c) \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan(\pi x/2)}$$

Problema 8.(derivada).

Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right).$

b) $g(x) = x^{\arctan(e^x)}.$

Problema 9.(derivadas n -ésimas).

Encuentre la n -ésima derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}.$

b) $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$