Semana 13

Emilio Vilches & Felipe Serrano

Errores y sugerencias a evilches@dim.uchile.cl

P1. calcule los siguientes límites, si es que existen.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x\left(\log_{1+x}(2)+\log_{(1+x)^2}(\pi)\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln\left(\cos(\sqrt{x})\right)}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{\ln(1+x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(x)}-e^x}{x}$

Solución.

Recordemos primero que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1 \tag{1}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}=1 \tag{2}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1 \tag{3}$$

$$\text{Si } \lim_{x\to x_0} f(x)=u_0 \text{ propiamente y } \lim_{u\to u_0} g(u)=l \text{ entonces } \lim_{u\to u_0} g(f(x))=l. \tag{4}$$

a) haciendo un cambio de base, notamos que:

$$\log_{1+x}(2)=\frac{\ln(2)}{\ln(1+x)}$$
$$\log_{(1+x)^2}(\pi)=\frac{\ln(\pi)}{2\ln(1+x)}$$

así

$$x\left(\log_{1+x}(2)+\log_{(1+x)^2}(\pi)\right)=\frac{2\ln(2)+\ln(\pi)}{2}\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)$$

luego

$$\lim_{x\to 0} x\left(\log_{1+x}(2)+\log_{(1+x)^2}(\pi)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(2)+\ln(\pi)}{2}\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)$$

usando (1) y álgebra de límites se obtiene que

$$\lim_{x\to 0} x\left(\log_{1+x}(2)+\log_{(1+x)^2}(\pi)\right)=\frac{2\ln(2)+\ln(\pi)}{2}=\ln(\sqrt{4\pi})$$

(b) queremos calcular

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(\cos(\sqrt{x}))}{x}$$

pero por (4)

$$\lim_{x\to 1} \ln\left(\cos(\sqrt{x})\right) = \ln\left(\cos(\sqrt{1})\right)$$

luego

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(\cos(\sqrt{x})\right)}{x} = \frac{\ln\left(\cos(1)\right)}{1}$$

(c) notemos que

$$\frac{2^x - 3^x}{\ln(1+x)} = \frac{e^{x\ln(2)} - e^{x\ln(3)}}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(2)\left(\frac{e^{x\ln(2)}-1}{x\ln(2)}\right) - \ln(3)\left(\frac{e^{x\ln(3)}-1}{x\ln(3)}\right)}{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

y

$$\begin{array}{lr} \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\ln(2)}-1}{x\ln(2)}\right) = 1 & \text{por (4) y (3)} \\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\ln(3)}-1}{x\ln(3)}\right) = 1 & \text{por (4) y (3)} \\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 & \text{por (1)} \end{array}$$

así por álgebra de límites

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(2)\left(\frac{e^{x\ln(2)}-1}{x\ln(2)}\right) - \ln(3)\left(\frac{e^{x\ln(3)}-1}{x\ln(3)}\right)}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \ln(2) - \ln(3)$$

(d) notamos que

$$\frac{e^{\operatorname{sen}(x)} - e^x}{x} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\left(\frac{e^{\operatorname{sen}(x)} - 1}{\operatorname{sen}(x)}\right) - \frac{e^x - 1}{x}$$

y

$$\begin{array}{lr} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 & \text{por (2)} \\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen}(x)}-1}{\operatorname{sen}(x)} = 1 & \text{por (4) y (3)} \\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 & \text{por (3)} \end{array}$$

luego por álgebra de límites

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(x)} - e^x}{x} = 0$$

P2. Determine la existencia de $\lim_{x\to x_0} [x]x$, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$.

Solución.

veamos por casos:

i) si $x_0 \in \mathbb{Z}$ notamos que

$$\lim_{x\to x_0^+} [x] = \lim_{u\to\infty} [x_0 + \tfrac{1}{u}] = x_0$$
$$\lim_{x\to x_0^-} [x] = \lim_{u\to\infty} [x_0 - \tfrac{1}{u}] = x_0 - 1$$

luego

$$\lim_{x\to x_0^+} [x]x = x_0^2$$
$$\lim_{x\to x_0^-} [x]x = x_0(x_0 - 1)$$

por lo tanto

$$\begin{array}{lr} \lim_{x\to x_0} [x]x = 0 & \text{si } x_0 = 0 \\ \lim_{x\to x_0} [x]x \ \text{ no existe} & \text{si } x_0 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \end{array}$$

ii) sea $x_0 \in (n, n+1)$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ notamos que

$$\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to x_0^+}[x] = \lim\limits_{x\to\infty}[x_0 + \frac{1}{u}] = [x_0] \\ \lim\limits_{x\to x_0^-}[x] = \lim\limits_{x\to\infty}[x_0 + \frac{1}{u}] = [x_0] \end{array}$$

luego

$$\lim_{x\to x_0}[x]x = [x_0]x_0$$

es decir el límite de $\lim\limits_{x\to x_0}[x]x$ existe cuando $x_0 \in (n, n+1)$ y vale $[x_0]x_0$.

P3. Sea una función tal que $f(x) \geq 1$ para todo $x \geq 0$ y $f(x) \leq 0$ para todo $x < 0$. Determine cuales de los siguientes límites nunca pueden existir: $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Solución.

Dado que la función f satisface:

$$\begin{array}{ll} f(x) \geq 1 & x \geq 0 \\ f(x) \leq 0 & x < 0 \end{array}$$

si se toma el límite cuando x tiende a cero, por la derecha y por la izquierda respectivamente se obtiene que:

$$\begin{array}{c} \lim_{x\to 0^+} f(x) \geq 1 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) \leq 0 \end{array}$$

si estos límites existiesen (el mejor de los casos), se tendría que

$$\left(\lim_{x\to 0^+} f(x)\right) - \left(\lim_{x\to 0^-} f(x)\right) \geq 1$$

es decir los límites laterales nunca pueden ser iguales, es decir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nunca puede existir.

P4. Determine para que valores de a el siguiente limite existe;

$$\lim_{x\to 0} |x|^a (1 - e^{-x}) \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$$

Solución:

Veamos por casos
i) si $a \geq 0$

$$|x|^a (1 - e^{-x}) \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = |x|^a \frac{(1 - e^{-x})}{x} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

pero:

$$\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u\to-\infty} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 0 \end{array}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 - e^{-x})}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} |x|^a = 0$$

luego si $a \geq 0$ el límite existe.
ii) si $a \leq 0$ el límite no existe.

P5. Calcule $\lim\limits_{v\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen}(v)}{v}$, demostrando que para todo $v \in [0, 1]$. $v \leq \operatorname{arc\,sen}(v) \leq \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$ y aplicando el Teorema del Sandwich.

Solución.

Recordemos que

$$\forall h \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \quad \operatorname{sen}(h) \leq h \leq \tan(h)$$

sea $h = \operatorname{arc\,sen}(v)$, $v \in (0,1)$, este v existe pues la función $\operatorname{arc\,sen}(x)$ es biyectiva en $[0,1]$, luego

$$\forall v \in (0,1) \quad \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} v) \leq \operatorname{arc\,sen}(v) \leq \tan(\operatorname{arc\,sen}(v))$$

pero $\tan\left(\operatorname{arc\,sen}(v)\right) = \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(v))}{\cos(\operatorname{arc\,sen}(v))} = \frac{v}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen}(v))}} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$ y $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,sen}(v)\right) = v$.
por lo tanto

$$\forall v \in (0,1) \quad v \leq \operatorname{arc\,sen}(v) \leq \tfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}$$

dividiendo por v

$$\forall v \in (0,1) \quad 1 \leq \operatorname{arc\,sen}(v) \leq \tfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

ahora notamos que $\lim\limits_{v\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = 1$
y por el Teorema del Sandwich se concluye que

$$\lim_{v\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen}(v)}{v} = 1$$

P6. Usando la definición de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ demuestre que

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Indicación: Para$\epsilon > 0$, escoja $m = \tan(\frac{\pi}{2} - \epsilon)$. Recuerde que arctan es creciente y acotada superiormente por $\frac{\pi}{2}$.

Solución.

Debemos probar que:

$$(\forall \epsilon > 0), (\exists m > 0), \forall x \in [m, \infty) \Rightarrow |\arctan(x) - \frac{\pi}{2}| \leq \epsilon$$

en efecto dado $\epsilon > 0$ escogemos $m = tan(\frac{\pi}{2} - \epsilon)$, luego

$$\begin{array}{c} x \geq \tan(\frac{\pi}{2} - \epsilon) \quad \Rightarrow \\ \arctan(x) \geq \frac{\pi}{2} - \epsilon \end{array}$$

además $\arctan(x)$ es acotada superiormente por $\frac{\pi}{2}$, por lo tanto

$$\frac{\pi}{2} - \epsilon \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon$$

es decir

$$|\arctan(x) - \frac{\pi}{2}| \leq \epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

P7. Calcule todas las asíntotas de la siguiente función y determine si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe.

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) & x \leq 0 \\ \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-1)} & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \frac{2+x+x^2}{1-x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} & 1 < x \end{cases}$$

i) asíntotas verticales: debemos calcular los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-1)}$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-1)}$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2+x+x^2}{1-x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-1)} = -1$

b) $\lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-1)} = -\infty$

d) $\lim_{x\to 1^+} \frac{2+x+x^2}{1-x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} = -\infty$

luego $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

ii) Asíntotas oblicuas y verticales: buscamos una asíntota de ecuación $y = mx + n$

a) asíntota en $+\infty$

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+x+x^2}{x\,(1-x^2)} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$
$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

luego no hay asíntota oblicua, sino una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$, en $+\infty$.

b) asíntota en $-\infty$

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\arctan(x)}{\tan(\arctan(x))} = \lim_{\theta\to \frac{-\pi}{2}} \frac{\theta}{\tan(\theta)} = \lim_{x\to \frac{-\pi}{2}} \frac{\theta\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} = 0$$
$$n = \lim_{x\to -\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \arctan(x) = \frac{-\pi}{2}$$

luego no hay asíntota oblicua, sino asíntota horizontal de ecuación $y = \frac{-\pi}{2}$, en $-\infty$.

iii) finalmente $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe pues

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-1)} = -1$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-1)} = 0$$