Trabajo Dirigido 1

Emilio Vilches & Felipe Serrano

Errores y sugerencias a evilches@dim.uchile.cl

P1. Usando exclusivamente los axiomas de los reales y mencionándolos claramente cada vez que los use, demuestre las siguientes propiedades. Si ocupa alguna otra propiedad entonces deberá demostrarla indicando los axiomas que use en ello.

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \neq 0$, $(x+y)(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1} + y^{-1}$

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \neq 0$, $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$

(c) Usando (b), demostrar que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $b, d \neq 0$, $ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + cb)(bd)^{-1}$

(d) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$

Solución

(a) notemos que la condición $x, y \neq 0$ garantiza que x^{-1}, y^{-1} existen, luego

$$\begin{aligned}
(x+y)(x^{-1}y^{-1}) &= x(x^{-1}y^{-1}) + y(x^{-1}y^{-1}) && \text{(distributividad)}\\
&= x(x^{-1}y^{-1}) + y(y^{-1}x^{-1}) && \text{(conmutatividad)}\\
&= (xx^{-1})y^{-1} + (yy^{-1})x^{-1} && \text{(asociatividad)}\\
&= 1y^{-1} + 1x^{-1} && \text{(inverso } \cdot)\\
&= y^{-1} + x^{-1} && \text{(neutro } \cdot)\\
&= x^{-1} + y^{-1} && \text{(conmutatividad)}
\end{aligned}$$

(b) de nuevo la condición $x, y \neq 0$ garantiza la existencia de x^{-1}, y^{-1}. Probemos ahora que $y^{-1}x^{-1}$ es el inverso de xy, luego por la unicidad del inverso concluiremos que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. en efecto

$$\begin{aligned}
(xy)(y^{-1}x^{-1}) &= x(yy^{-1})x^{-1} && \text{(asociatividad)}\\
&= x(1x^{-1}) && \text{(inverso } \cdot)\\
&= xx^{-1} && \text{(neutro } \cdot)\\
&= 1 && \text{(inverso } \cdot)
\end{aligned}$$

(c) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b, d \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
(ad+cb)(bd)^{-1} &= (ad+cb)(d^{-1}b^{-1}) && \text{(parte } (b)\text{)}\\
&= (ad)(d^{-1}b^{-1}) + (cb)(d^{-1}b^{-1}) && \text{(distributividad)}\\
&= (ad)(d^{-1}b^{-1}) + (cb)(b^{-1}d^{-1}) && \text{(conmutatividad)}\\
&= a(dd^{-1})b^{-1} + c(bb^{-1})d^{-1} && \text{(asociatividad)}\\
&= a(1 \cdot b^{-1}) + c(1 \cdot d^{-1}) && \text{(inverso } \cdot\text{)}\\
&= ab^{-1} + cd^{-1} && \text{(neutro } \cdot\text{)}
\end{aligned}$$

lo que prueba lo pedido.

(d) Si $a = 0$, no hay nada que probar.
Si $a \neq 0$ y como $a^2 = 0$, entonces multiplicando por a^{-1} (que existe pues $a \neq 0$), se obtiene:

$$\begin{aligned}
a^2 &= 0 && \\
a^{-1}(aa) &= a^{-1} \cdot 0 && \text{(multiplicando por } a^{-1}\text{)}\\
(aa^{-1})a &= 0 && \text{(asociatividad y def de 0)}\\
1 \cdot a &= 0 && \text{(inverso } \cdot\text{)}\\
a &= 0 && \text{(neutro } \cdot\text{)}
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. [1]

P2. Usando **sólo** los axiomas de los números reales y las unicidades de los inversos, demuestre las siguientes propiedades(si necesita alguna propiedad extra, **debe demostrarla**).

(a) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $(-x) + (-y)$ es inverso aditivo de $x + y$.

(b) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que se verifica la relación $ad + (-(cb)) = 0$ entonces

$$[(a+b)d] + [-((c+d)b)] = 0.$$

(c) Para $a \neq 0$, $-a(a^{-1}) = (-a)^{-1}$.

Solución

(a) para demostrar que $(-x) + (-y)$ es inverso aditivo de $x + y$, debemos probar que

$$[(-x) + (-y)] + (x + y) = 0 \tag{1}$$

y que

$$(x + y) + [(-x) + (-y)] = 0 \tag{2}$$

[1] El principio de contradicción se basa en $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q} \Rightarrow F)$

probaremos sólo (1) y (2) se deja de ejercicio.

$$\begin{aligned}
[(-x)+(-y)]+(x+y) &= [(-y)+(-x)]+(x+y) && \text{(conmutatividad)}\\
&= (-y)+([(-x)+x]+y) && \text{(asociando)}\\
&= (-y)+(0+y) && \text{(inverso +)}\\
&= (-y)+y && \text{(neutro +)}\\
&= 0 && \text{(inverso +)}
\end{aligned}$$

(b) Supongamos que $(ad)+(-(cb))=0$, entonces

$$\begin{aligned}
[(a+b)d]+[-((c+d)b)] &= [(ad)+(bd)]+[-((cb)+(db))] && \text{(distributividad)}\\
&= [(ad)+(bd)]+[(-(cb))+(-(db))] && \text{(parte (a))}\\
&= [(ad)+(bd)]+[(-(bd))+(-(cb))] && \text{(conmutatividad)}\\
&= (ad)+[(bd)+(-(bd))]+(-(cb)) && \text{(asociatividad)}\\
&= (ad)+0+(-(cb)) && \text{(inverso +)}\\
&= (ad)+(-(cb)) && \text{(neutro +)}\\
&= 0 && \text{(hipótesis)}
\end{aligned}$$

(c) notemos que

$$\begin{aligned}
0 &= 0\cdot(a^{-1}(-a)^{-1}) && \text{(definición de 0)}\\
&= (a+(-a))(a^{-1}(-a)^{-1}) && \text{(inverso +)}\\
&= a(a^{-1}(-a)^{-1})+(-a)(a^{-1}(-a)^{-1}) && \text{(distributividad)}\\
&= a(a^{-1}(-a)^{-1})+(-a)((-a)^{-1}a^{-1}) && \text{(conmutatividad)}\\
&= (aa^{-1})(-a)^{-1}+((-a)(-a)^{-1})a^{-1} && \text{(asociatividad)}\\
&= 1\cdot(-a)^{-1}+1\cdot a^{-1} && \text{(neutro }\cdot\text{)}\\
&= (-a)^{-1}+a^{-1} && \text{(neutro +)}
\end{aligned}$$

por lo tanto $0=(-a)^{-1}+a^{-1}$, de donde se obtiene que $-(a^{-1})=(-a)^{-1}$.

P3. Usando propiedades elementales de los números reales, demuestre que para todo $x,y,z,w\in\mathbb{R}$, $w\neq 0$, $z\neq 0$ lo siguiente es verdadero

$$(xw+yz)^2=(x^2+y^2)(w^2+z^2)\Rightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}\text{ t.q. } x=\lambda, y=\lambda z$$

Para ello note en primer lugar que la igualdad del lado izquierdo permite deducir que $x^2z^2+y^2w^2=2xwyz$. Luego, vea que esto ultimo implica que $xz=yw$. Finalmente, de la igualdad anterior deduzca la conclusión.

Solución
Desarrollemos la expresión $(xw+yz)^2 = (x^2+y^2)(w^2+z^2)$;

$$\begin{aligned}(xw+yz)^2 &= (x^2+y^2)(w^2+z^2)\\(xw)^2+2xwyz+(yz)^2 &= x^2w^2+y^2w^2+x^2z^2+y^2z^2\\2xwyz &= y^2w^2+x^2z^2\\(yw-xz)^2 &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto $yw-xz=0$, es decir $yw=xz$, y por la tanto existe una constante μ tal que $yw=xz=\mu$.
Por otro lado la condición $z,w\neq 0$ implica que z,w poseen inverso, luego multiplicando la ecuación anterior por $w^{-1}z^{-1}$, se obtiene:

$$yz^{-1} = xw^{-1} = \mu(w^{-1}z^{-1})$$

entonces tomando $\lambda=\mu(w^{-1}z^{-1})$, se tiene que $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ t.q. $x=\lambda, y=\lambda z$.