Clase auxiliar: Introducción al cálculo

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Emilio Vilches
13 de Marzo de 2008

P1. Probar que para $b, d \neq 0$, $a \neq b$, $c \neq d$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

Solución:
notemos que:

$$\begin{aligned}
(a+b)(a-b)^{-1} &= [(a+b)\cdot 1]\cdot(a-b)^{-1} && \text{neutro } \cdot \\
&= [(a+b)(b^{-1}b)](a-b)^{-1} && \text{inverso mult.} \\
&= [[(a+b)b^{-1}]b](a-b)^{-1} && \text{(asociatividad)} \\
&= [(a+b)b^{-1}][b(a-b)^{-1}] && \text{(asociatividad)} \\
&= (ab^{-1}+bb^{-1})[(b^{-1})^{-1}(a-b)^{-1}] && \text{(distributividad + prop } \mathbf{P2}\text{. parte b.)} \\
&= (ab^{-1}+1)((a-b)b^{-1})^{-1} && \text{(inverso + prop } \mathbf{P1}\text{. parte a.)} \\
&= (ab^{-1}+1)(ab^{-1}-bb^{-1})^{-1} && \text{(distributividad)} \\
&= (ab^{-1}+1)(ab^{-1}-1)^{-1} && \text{(distributividad)}
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
(c+d)(c-d)^{-1} &= [(c+d)\cdot 1]\cdot(c-d)^{-1} && \text{neutro } \cdot \\
&= [(c+d)(d^{-1}d)](c-d)^{-1} && \text{inverso mult.} \\
&= [[(c+d)d^{-1}]d](c-d)^{-1} && \text{(asociatividad)} \\
&= [(c+d)d^{-1}][d(c-d)^{-1}] && \text{(asociatividad)} \\
&= (cd^{-1}+dd^{-1})[(d^{-1})^{-1}(c-d)^{-1}] && \text{(distributividad +prop } \mathbf{P2}\text{. parte b.)} \\
&= (cd^{-1}+1)((c-d)d^{-1})^{-1} && \text{(inverso + prop } \mathbf{P1}\text{. parte a.)} \\
&= (cd^{-1}+1)(cd^{-1}-dd^{-1})^{-1} && \text{(distributividad)} \\
&= (cd^{-1}+1)(cd^{-1}-1)^{-1} && \text{(distributividad)}
\end{aligned}$$

ahora como $ab^{-1} = cd^{-1}$ se concluye que

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

Dudas y consultas a evilches@dim.uchile.cl