Problema 1 Probar que $\inf\{\frac{1}{2n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\} = 0$

Solución:

Como cada elemento del conjunto es positivo, entonces 0 es cota inferior. Basta probar que es la mayor de las cotas inferiores para que sea el ínfimo.

Asumamos, por contradicción, que existe $a > 0$ tal que a es cota inferior del conjunto. Luego se cumple que $(\forall\ n \in \mathbb{N})\ a < \frac{1}{2n+1} \Rightarrow (2n+1)a < 1$. Por la propiedad arquimediana, $(\exists k \in \mathbb{N})\ ka > 1$. Luego, tomamos $k_0 > k,\ k_0 \in \mathbb{N}$ impar, que por ser impar tiene la forma $k_0 = 2n_0 + 1$ con $n_0 \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $k_0 a = (2n_0+1)a > 1$, lo que contradice el hecho que exista una cota inferior mayor que 0. Concluimos que 0 es el ínfimo.

Problema 3 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, demuestre que si para cualquier $\epsilon > 0$ se cumple que $a \leq b + \epsilon$ entonces $a \leq b$. Para argumentar, estudie el conjunto $\{\epsilon > 0 \ : \ \epsilon \geq a - b\}$

Solución 1:

Supongamos que, a pesar de todo, $a > b$, luego tomamos $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$, pues $a > b$. Para este ϵ se cumple:

$$a \leq b + \epsilon = b + \frac{a-b}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} \leq \frac{b}{2} \Rightarrow a \leq b$$

Esto contradice que $a > b$. Luego, $a \leq b$.

Solución 2:

Como $\forall \epsilon > 0,\ a \leq b + \epsilon$, entonces el conjunto $\{\epsilon > 0 \ : \ \epsilon \geq a - b\} = \{\epsilon > 0\}$. El ínfimo de este conjunto es 0 y $a - b$ es cota inferior, luego por definición del ínfimo, $0 \geq a - b \Rightarrow a \leq b$. Lo importante es que el ínfimo es <u>la mayor</u> de las cotas inferiores.

Problema 5 Sean $A, B \subseteq \mathbb{R},\ A \neq \emptyset \neq B$, tales que verifican:

1. $A \cup B = \mathbb{R}$
2. Todo elemento de A es menor que todo elemento de B

Demuestre que existe un real α que es simultáneamente cota superior de A y cota inferior de B. Pruebe, además, que dicho número real α es único.

Solución:

Sea $\alpha = \sup(A)$. Vamos a probar que α es el ínfimo de B. Hay dos opciones para este α, $\alpha \in A$ o $\alpha \in B$.

Si $\alpha \in A$, entonces $\alpha = \max(A)$. Veamos que α es el ínfimo de B. Supongamos $\exists \beta > \alpha$, tal que β es cota inferior de B. Como $\alpha = \max(A)$, entonces $\beta \in B$, pues βes mayor que α. Luego $\beta = \min(B)$, por ser cota inferior del conjunto y pertenecer a el. La pregunta que nos da la contradicción es: ¿En que conjunto está $\frac{\alpha+\beta}{2}$? No puede estar en A por ser mayor que el máximo, ni en B, por ser menor que el mínimo. Esto es una contradicción pues se tiene que verificar 1. Por lo tanto α es el ínfimo de B.

Si $\alpha \in B$, veamos que α es el mínimo de B (en este caso, esto es equivalente a probar que α es el ínfimo, pues estoy asumiendo que $\alpha \in B$). Si α no es el mínimo, entonces $\exists \beta \in B\ /\ \beta < \alpha$. Como todo elemento de A es menor que todo elemento de B, entonces β es cota superior de A y como el supremo es la menor de las cotas superiores, $\alpha \leq \beta$. Contradicción. Por lo tanto α es el mínimo de B.

Problema 7 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente y tal que su complemento es acotado inferiormente. Muestre que $\text{ínf}(A^c) = \sup(A)$ sí y sólo si $A = (-\infty, a]$ o $A = (-\infty, a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Solución:

($\Rightarrow$) Sea $a = \sup(A) = \text{ínf}(A^c)$. Veamos que $(\forall x \in \mathbb{R})\ x < a \Rightarrow x \in A$. Para variar, por contradicción. Supongamos $\exists y \in \mathbb{R}$ tal que $y < a$ e $y \notin A \Leftrightarrow y \in A^c$. Esto es una contradicción con que a sea el ínfimo de A^c. Es decir, no puede haber ningún elemento en un conjunto (no vacío) que sea menor que el ínfimo de ese conjunto. Luego A es de la forma pedida, pues no dijimos nada respecto a si a esta o no en A.

($\Leftarrow$) Es cosa de calcularlo. Vean la tutoría.