Semana 12

P1. Demuestre que las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$ son las asíntotas oblicuas de las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$.

Solución:

Resolveré para la recta $y = -\frac{b}{a}$ y la hipérbola $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, pues el resto es análogo.

Esta hipérbola, esta compuesta por dos funciones,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 + a^2}$$

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 + a^2}$$

Veremos la segunda. Recordemos que si la recta $mx + n$ es asíntota oblicua de $f(x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) - (mx + n) = 0$. Veamos que se cumple eso (nótese que no nos piden encontrar las asíntotas, en ese caso tenemos que encontrar el m y el n como se indica en la tutoría). La hipérbola escogida, se "abre" hacia abajo, luego es esperable que $-\frac{b}{a}x$ sea la asíntota en el ∞ y que $\frac{b}{a}x$ sea la asíntota en el $-\infty$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} -\frac{b}{a}\sqrt{x^2+a^2} - \left(-\frac{b}{a}x\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2+a^2}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2+a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{b}{a}\left(x^2 - \left(x^2+a^2\right)\right)}{\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-ba}{\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Cuando $x \to -\infty$ es análogo (sólo que con la otra recta) y los otros casos también son análogos considerando la recta adecuada.

P2. Si $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función, demuestre que el dominio A de f permite estudiar el límite de f cuando $x \to x_0^+$ ssi existe al menos una sucesión (s_n) en A que cumple $s_n \to x_0$ y $s_n > x_0$, $\forall n$.

Use este resultado para estudiar si en los siguientes casos, el dominio de la función permite o no estudiar el límite cuando $x \to x_0^+$

a) $A = (x_0, x_0 + 1)$

b) $A = \{x_0 + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$

c) $A = \{x_0 + \frac{n}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\}$

d) $A = \{x_0 + \frac{m+n}{mn};\ m, n \in \mathbb{N}\}$

e) $A = (x_0, x_0 + 1) \cap \mathbb{Q}$

f) $A = \mathbb{Q}$

g) $A=\{x_0+\sin(\frac{1}{n});\, n\in\mathbb{N}\}$

Solución.

i) Supongamos que el dominio A permite estudiar el límite de f cuando $x\to x_0^+$, luego

$$(\forall\delta>0)\ ,\exists x\in A\cap(x_0,x_0+\delta)$$

Como la condición anterior se cumple para todo δ, tomemos $\delta=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, y con esto lo anterior se puede escribir como:

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ ,\exists x\in A\cap(x_0,x_0+\frac{1}{n})$$

esto es equivalente a decir que:

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ ,\exists x_n\in A,\, x_0<x_n\leq x_0+\frac{1}{n}$$

donde hemos escrito x_n en vez de x para hacer notar el hecho que x puede depender de n.

tomando $s_n=x_n$ tenemos que $s_n>x_0$ y es directo ver que $s_n\to x_0$, por lo tanto existe una sucesión que cumple lo pedido.

ii) Supongamos que existe una sucesión (s_n) en A tal que $s_n\to x_0$ y $s_n>x_0$, luego

$$(\forall\epsilon>0)\,(\exists n_0\in\mathbb{N})\,(\forall n>n_0)\Rightarrow|s_n-x_0|<\epsilon$$

a partir de esto se tiene que:

$$s_n<x_0+\epsilon$$

y por hipótesis $s_n>x_0$, $\forall n$, así:

$$x_0<s_n<x_0+\epsilon$$

por lo tanto

$$(\forall\epsilon>0)\,,\exists x=s_n\in A\cap(x_0,x_0+\epsilon)$$

y esto es equivalente a decir que A permite estudiar el límite de f cuando $x\to x_0^+$.

iii) Estudiemos si los siguientes dominios permiten estudiar el límite de f cuando $x\to x_0^+$.

En virtud de la parte i) y ii) , para probar que el dominio A permite estudiar el límite de f cuando $x\to x_0^+$ basta encontrar una sucesión que cumpla las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{c}(s_n)\in A\\ s_n\to x_0\\ s_n>x_0\end{array}\tag{1}$$

a) $A=(x_0,x_0+1)$.
$s_n=x_0+\frac{1}{n+1}$ cumple (1) , luego A si permite.

b) $A=\{x_0+\frac{1}{n};\, n\in\mathbb{N}\}$.
$s_n=x_0+\frac{1}{n}$ cumple (1) , luego A si permite

c) $A=\{x_0+\frac{n}{n+1};\, n\in\mathbb{N}\}$.
En este caso A no permite pues $s_n=x_0+\frac{n}{n+1}$ no cumple con (1) y cualquier otra sucesión en A esta contenida en (s_n), luego no existe sucesión que cumpla con (1).

d) $A=\{x_0+\frac{m+n}{mn};\, m,n\in\mathbb{N}\}$.
Notemos que $A=\{x_0+\frac{1}{n}+\frac{1}{m};\, m,n\in\mathbb{N}\}$
tomemos todos los m, n tales que $m=n$, sea $s_n=x_0+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=x_0+\frac{2}{n}$, claramente s_n cumple (1), luego A si permite.

e) $A = (x_0, x_0+1) \cap \mathbb{Q}$.
Por densidad la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ siempre es posible encontrar un racional entre dos reales, luego

$$(\forall \delta > 0)\ , \exists x \in A \cap (x_0, x_0+\delta)$$

es decir A si permite.

f) $A = \mathbb{Q}$.
$(x_0, x_0+1) \cap \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$, luego A si permite.

g) $A = \{x_0 + \sin(\frac{1}{n});\ n \in \mathbb{N}\}$
Sea $s_n = x_0 + \sin(\frac{1}{n})$
probemos que $s_n \to x_0$
en efecto: $x_0 < x_0 + \sin(\frac{1}{n}) \leq x_0 + \frac{1}{n}$, pues si $x > 0$, $0 < \sin(x) \leq x$, luego por sandwich $s_n \to x_0$ y es directo ver que cumple las otras condiciones de (1), luego A si permite.

P3. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.
Usando la definición de límite cuando $x \to \infty$, demuestre que

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \max\{f(x), g(x)\} = \ell$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \max\{f(x), \ell\} = \ell$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \max\{f(x), \ell + \frac{1}{x}\} = \ell^+$

Solución.

(a) Dado que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$, se tiene:

$$\begin{array}{l}\forall \epsilon > 0 \quad \exists m_1 > 0 \quad \text{tq} \quad \forall x \geq m_1 \quad \ell - \epsilon \leq f(x) \leq \ell + \epsilon \\ \forall \epsilon > 0 \quad \exists m_2 > 0 \quad \text{tq} \quad \forall x \geq m_1 \quad \ell - \epsilon \leq g(x) \leq \ell + \epsilon\end{array}$$

por otro lado sabemos que si $a \leq x \leq b$ y $a \leq y \leq b$ entonces se tiene que $a \leq \max\{x, y\} \leq b$, usando esto se tiene que $\forall x \geq m = \max\{m_1, m_2\}$, $\ell - \epsilon \leq \max\{f(x), g(x)\} \leq \ell + \epsilon$ y de aquí

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists m = \max\{m_1, m_2\} > 0 \quad \text{tq} \quad \forall x \geq m_1 \quad \ell - \epsilon \leq \max\{f(x), g(x)\} \leq \ell + \epsilon$$

es decir $\lim\limits_{x\to+\infty} \max\{f(x), g(x)\} = \ell$.

(b) basta tomar $g(x) = \ell$ en la parte (a).

(c) hay que demostrar que $\lim\limits_{x\to+\infty} \max\{f(x), \ell + \frac{1}{x}\} = \ell^+$, es decir debemos probar que $\lim\limits_{x\to+\infty} \max\{f(x), \ell + \frac{1}{x}\} = \ell$ y que $\max\{f(x), \ell + \frac{1}{x}\} > \ell$. En efecto la primera condición se obtiene usando (a) con $g(x) = \ell + \frac{1}{x}$ (claramente $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ell + \frac{1}{x}) = \ell$) y para la segunda basta notar que $\max\{f(x), \ell + \frac{1}{x}\} \geq \ell + \frac{1}{x} > \ell$, pues al tomar limite se considera desde x positivo.

P4. Demuestre que si una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la propiedad

$$\exists L > 0, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \tag{2}$$

entonces, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Verifique que las funciones $f(x) = x$ y $f(x) = \text{sen}(x)$ satisfacen la propiedad (2) pero la función $f(x) = x^2$ no.

Solución.
forma 1: "caracterización ϵ-δ."
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\epsilon > 0)\,(\exists\delta > 0)\,,\, 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
en efecto:
Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar $\delta(\epsilon)$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

Como f cumple (2) tenemos que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| \leq L\delta$$

Imponiendo que $L\delta = \epsilon$, encontramos que $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{L}$ satisface todo lo pedido.
Obs. Recordar que si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, entonces

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

forma 2 : Definición.
Como f cumple (2) para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ elijamos $x_1 = x_0$ y $x_2 = x_0 + \frac{1}{u}$, reemplazando en (2) se obtiene:

$$-L|\frac{1}{u}| \leq f(x_0 + \frac{1}{u}) - f(x_0) \leq L|\frac{1}{u}|$$

reordenando términos

$$f(x_0) - L|\frac{1}{u}| \leq f(x_0 + \frac{1}{u}) \leq f(x_0) + L|\frac{1}{u}|$$

tomando límite cuando $u \to \infty$, usando el teorema del sandwich, tenemos que

$$\lim_{u\to\infty} f(x_0 + \frac{1}{u}) = f(x_0)$$

es decir

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Obs. Recordar que por definición

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{u\to\infty} f(x + \frac{1}{u})$$

de forma análoga tomando $x_1 = x_0$ y $x_2 = x_0 - \frac{1}{u}$ se obtiene que

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

- $f(x) = x$, debemos encontrar L tal que

  $$|x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|$$

  tomando $L = 1$,se cumple la propiedad.
- $f(x) = \sin(x)$, sabemos que

  $$\forall x \in \mathbb{R} - x \leq \sin(x) \leq x$$

  luego

  $$-x_1 \leq \sin(x_1) \leq x_1$$
  $$x_2 \leq \sin(-x_2) \leq -x_2$$

  sumando estas desigualdades y utilizando la imparidad de la función seno, obtenemos que

  $$-(x_1 - x_2) \leq \sin(x_1) - \sin(x_2) \leq x_1 - x_2$$

  es decir

  $$|\sin(x_1) - \sin(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$$

- $f(x) = x^2$, por contradicción supongamos que f satisface (2) es decir

$$\exists L > 0, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \ |x_1^2 - x_2^2| \leq L|x_1 - x_2|$$

por otro lado $|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2|$, luego

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| \leq L|x_1 - x_2|$$

además supongamos que $x_1 \neq x_2$, entonces

$$|x_1 + x_2| \leq L$$

lo cual es una contradicción.

P5. Las partes más importantes de este problema son la a) y la b).

Solución.

La parte (a). Primero notemos que

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = l \iff \lim_{x \to x_o} f(x) - l = 0.$$

Luego, probar que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, es lo mismo que probar que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x - x_0) = 0$, por la primera propiedad de la función $f(x)$ (ver (3) un poco más abajo). Por definición,

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x - x_0) = \lim_{u \to \infty} f\left(x_0 - x_0 + \frac{1}{u}\right) = \lim_{u \to \infty} f\left(\frac{1}{u}\right).$$

De nuevo por definición, $\lim_{u \to \infty} f\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ por la segunda propiedad de la función. Para concluir, basta probar que $f(0) = 0$, pero por la primera propiedad,

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$$

$$\Rightarrow f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Hemos ocupado sin justificar explícitamente que $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2)$. Esto se deduce del siguiente hecho

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Rightarrow -f(x) = f(-x). \tag{3}$$

La parte (b). Supongamos primero el caso particular en que $q_n \to 0^+$. Sabemos por la segunda propiedad de la función que $\lim_{u \to \infty} f\left(\frac{1}{u}\right) = f(0) = 0$. Si llamamos $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$, tenemos que $\lim_{u \to \infty} g(u) = 0$ y esto por definición es (el dominio es $\mathbb{R}$):

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists m > 0, \ \forall u \in [m, \infty), \quad |g(u)| < \epsilon,$$

o bien,

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists m > 0, \ \forall u \in [m, \infty), \quad \left| f\left(\frac{1}{u}\right) \right| < \epsilon.$$

Como esto se cumple $\forall u \in [m, \infty)$, entonces puedo encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que u_{n_0}, u_{n_0+1},etc., cumplen que $\forall n \geq n_0, \quad \frac{1}{u_n} = q_n$. En este caso, se cumple

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}0, \ \forall n \geq n_0 \quad |f(q_n)| = \left| f\left(\frac{1}{u_n}\right) \right| < \epsilon.$$

Luego $\lim f(q_n) = 0 = f(0)$

Ahora ocupemos este caso para probar que se cumple cuando $q_n \to x_0^+$. Definamos la sucesión $a_n = q_n - x_0$. Claramente $a_n \to 0^+$, luego

$$\begin{aligned} \lim f(a_n) = 0 &\iff \lim f(q_n - x_0) = 0 \\ &\iff \lim [f(q_n) - f(x_0)] = 0 \\ &\iff \lim f(q_n) = f(x_0) \end{aligned}$$

Parte (c), propuesta.

Parte (d), propuesta. Una idea puede formar un sucesión de racionales que converja a un real x_0 justificando su existencia por la densidad de los racionales y luego aplicar los resultados de la parte (b) y (c), y el teorema del sandwich.

P6. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones que satisfacen la relación

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(y) \geq f(x) + g(x)(x - y) \tag{4}$$

a) Muestre que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad g(x_2)(x_1 - x_2) \geq f(x_2) - f(x_1) \geq g(x_1)(x_1 - x_2).$$

b) Probar que si g es una función acotada entonces $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

c) Probar que si

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^-} g(x) = g(a)$$

entonces

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -g(a)$$

Solución.

a) Como (4) se cumple para todo x, e y Tomemos x e y adecuados.

- Tomando $x = x_1$ e $y = x_2$ en (4) se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x_2) \geq f(x_1) + g(x_1)(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \\ f(x_2) - f(x_1) \geq g(x_1)(x_1 - x_2) \end{aligned} \tag{5}$$

- Análogamente tomando $x = x_2$ e $y = x_1$ en (4):

$$\begin{aligned} f(x_1) \geq f(x_2) + g(x_2)(x_2 - x_1) \quad \Rightarrow \\ f(x_2) - f(x_1) \leq g(x_2)(x_1 - x_2) \end{aligned} \tag{6}$$

luego a partir de (5) y (6) tenemos que:

$$g(x_2)(x_1 - x_2) \geq f(x_2) - f(x_1) \geq g(x_1)(x_1 - x_2) \tag{7}$$

b) Si g es una función acotada existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que

$$m \leq g(x) \leq M$$

Sea $x_0 > x$ luego

$$\begin{aligned} g(x_0)(x_0 - x) \geq m(x_0 - x) \\ g(x)(x_0 - x) \leq M(x_0 - x) \end{aligned} \quad \text{y}$$

usando la parte (a) con $x_1 = x_0$ y $x_2 = x$ y lo anterior se tiene que:

$$M(x_0 - x) \geq g(x)(x_0 - x) \geq f(x) - f(x_0) \geq g(x_0)(x_0 - x) \geq m(x_0 - x)$$

es decir

$$M(x_0 - x) \geq f(x) - f(x_0) \geq m(x_0 - x)$$

reordenando términos

$$M(x_0 - x) + f(x_0) \geq f(x) \geq m(x_0 - x) + f(x_0)$$

tomando limite cuando x tiende a x_0, usando sandwich concluimos que:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

de forma análoga se puede probar que:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

(c)

- Probemos que:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -g(a)$$

sea $x > a$, luego tomando $x_1 = x$ y $x_2 = a$,en (7) se tiene que

$$g(a)(x - a) \geq f(a) - f(x) \geq g(x)(x - a)$$

dividiendo por $(x - a) > 0$

$$g(a) \geq \frac{f(a) - f(x)}{x - a} \geq g(x)$$

multiplicando por -1.

$$-g(a) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq -g(x)$$

tomando limite cuando x tiende a a^+y usando el hecho de que

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = g(a)$$

tenemos que

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -g(a)$$

de forma análoga se puede demostrar que

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -g(a)$$