Guía de Ejercicios: Introducción al cálculo

Profesor: Raúl Uribe
Auxiliar: Cristobal Quiñinao & Emilio Vilches

Jueves 4 de Mayo de 2009

P1. Calcule los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arctan(3n^2-8n!)}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos(3n^2+2)(n-2)}{n^3+2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{\sin(3\pi n)-n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+4^n-1}{3^{2n}-7^n+2}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8^n-7^n}{n7^{n+1}-8^{n+1}}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n^3+2n^2}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^{2n}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3}{n^2+4}\right)^{3(n^2+4)}$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+1)-\ln(n))$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{2n+1}\right)^n$

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{k}{n}}}{n}$

ñ) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n+\frac{1}{3}}{4n+1}\right)^n$

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{2n^2+1}-\frac{n^2}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$

p) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-n)^{n+1}}{(n+1)^n}$

P2. Calcule los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e}-1)$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1^2+2^2+\cdots+n^2}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+\sin(n^2)}{n+\cos n}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdot\ldots\cdot(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot k!}{(n+1)!}$

Indicación: $k\cdot k! = (k+1)! - k!$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{a^n+b^n}\right)$, si $a > b > 0$.

P3. Sea $a_n \geq -1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Demuestre que para $p\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{1+a_n} = 1.$$

P4. Dados a, b, c reales positivos. Resolver la ecuación

$$\log_{x^2} a + \log_x b = c.$$

P5. Sea $a > 0$.Utilizando las desigualdades

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1-x} \quad \forall x < 1, \quad 1 + x \leq \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

estudie en los dos casos siguientes la convergencia de la sucesión

$$\exp(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2}).$$

a) Si $s_n \to a$ con $s_n < a$,

b) Si $s_n \to -a$ con $s_n > a$.

P6. Dado $a \in \mathbb{R}$, calcular

$$\lim_{n\to\infty} n \ln(1 + \frac{1}{n+a}).$$

P7. Calcule los siguientes límites

a) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{1+n}\right)^n$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(\frac{1}{n})-1}{e^{\frac{1}{n^2}}-1}$

d) $\lim_{n\to\infty} n(\sin(a + \frac{1}{n}) - \sin a)$

e) $\lim_{n\to\infty} \{\frac{1}{n}[\log_x(a) + \log_{x^2}(b)]\}$, si $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

f) $\lim_{n\to\infty} n\sqrt{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}$

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(\frac{1}{n})-1}{\tan(\frac{1}{n^2})}$

h) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^a+1}-\sqrt{n^a-1}}{\sqrt{n^a}}$

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$