

Semana 11

Emilio Vilches & Felipe Serrano

Errores y sugerencias a evilches@dim.uchile.cl

P1. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

Solución:

Tenemos que $\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) = \ln(k+1) - \ln(k)$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) &= \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) \\ &= \ln(n+1) \end{aligned} \tag{1}$$

donde (1) es por la propiedad telescópica y $\ln(1) = 0$. Luego, el límite original se reduce a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$$

Ahora, $\frac{\ln(n+1)}{n} = \ln \left(\sqrt[n]{n+1} \right)$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\sqrt[n]{n+1} \right) = \ln(1) = 0,$$

por la siguiente propiedad:

Sea $(a_n) \rightarrow a > 0$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_n) = \ln(a)$$

Ver tutoría.

P2. Demuestre que $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ e $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ son convergentes y que tiene igual límite.

Solución:

Recordemos que

$$(\forall x > 0) \quad \ln(x) \leq x - 1 \tag{2}$$

$$(\forall x > 0) \quad \ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x} \tag{3}$$

Veamos que x_n e y_n son monótonas:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

pero como $\frac{n}{n+1} > 0$, podemos aplicar (2) , entonces

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &\leq \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - 1 = 0 \\ \Rightarrow x_{n+1} &\leq x_n \end{aligned}$$

es decir x_n es decreciente.

análogamente para y_n :

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= x_{n+1} - \frac{1}{n+1} - x_n + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

pero como $\frac{n}{n+1} > 0$ usando (3) tenemos:

$$\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \geq \frac{1}{n} + 1 - \frac{n+1}{n} \quad (4)$$

$$= 0 \quad (5)$$

por lo tanto

$$y_{n+1} - y_n \geq 0$$

donde hemos usado (5) y el hecho de que el logaritmo es creciente, obteniendo que:

$$y_{n+1} \geq y_n$$

es decir y_n es creciente.

de la definición de $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ se obtiene que:

$$x_n \geq y_n$$

con todo lo anterior tenemos que:

$$y_1 \leq y_n \leq x_n \leq x_1$$

es decir ambas sucesiones son monótonas y acotadas, por lo tanto son convergentes.

tomando limite a $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ y usando que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, por álgebra de limites, deducimos que ambas sucesiones tienen límites iguales.

P3. Para $x > 0$, calcule $\lim n (\sqrt[n]{x} - 1)$.

Solución:

Como $x > 0$, entonces $x = \exp(\ln(x))$. Así, $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\exp(\ln(x))} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{n}\right)$ y el límite queda

$$\lim n \left(\exp\left(\frac{\ln(x)}{n}\right) - 1 \right)$$

Esto tiene la forma de la siguiente proposición:

Sea $(a_n) \rightarrow 0$, $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim \frac{\exp(a_n) - 1}{a_n} = 1$$

Ver tutoría.

Naturalmente identificamos a_n con $\frac{\ln(x)}{n}$, por lo que tendremos que manipular un poco la expresión del límite para formar la proposición,

$$\begin{aligned} n \left(\exp\left(\frac{\ln(x)}{n}\right) - 1 \right) &= \frac{\left(\exp\left(\frac{\ln(x)}{n}\right) - 1 \right)}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{\ln(x) \left(\exp\left(\frac{\ln(x)}{n}\right) - 1 \right)}{\frac{\ln(x)}{n}} \end{aligned}$$

Por álgebra de límites y la proposición, concluimos que

$$\begin{aligned} \lim n (\sqrt[n]{x} - 1) &= \lim \frac{\ln(x) \left(\exp\left(\frac{\ln(x)}{n}\right) - 1 \right)}{\frac{\ln(x)}{n}} \\ &= \ln(x) \end{aligned}$$

P4. Calcule $\lim (1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n) - 1}}$, donde (a_n) es una sucesión que converge a cero.

Solución

Recordemos primero que:

$$(\forall x \in (0, \infty)) \quad \exp(\ln(x)) = x \quad (6)$$

$$\text{Si } b_n \rightarrow b, \text{ entonces } \lim \exp(b_n) = \exp(b) \quad (7)$$

$$(\forall x \in (0, \infty)) \quad \ln(x^a) = a \ln(x) \quad (8)$$

$$\text{Si } b_n \rightarrow 0, b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{entonces } \lim \frac{\exp(b_n) - 1}{b_n} = 1 \quad (9)$$

$$\text{Si } b_n \rightarrow 0, b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{entonces } \lim \frac{\ln(1+b_n)}{b_n} = 1 \quad (10)$$

Notemos que de (6) y (8)

$$(1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n) - 1}} = \exp\left(\ln\left((1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n) - 1}}\right)\right)$$

y

$$\ln(1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n) - 1}} = \frac{1}{\exp(2a_n) - 1} \ln(1 + a_n) = \frac{\frac{1}{2} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n}}{\frac{\exp(2a_n) - 1}{2a_n}}$$

sea $p_n = \frac{\ln(1+a_n)}{a_n}$, de acuerdo con (10) $p_n \rightarrow 1$, pues $a_n \rightarrow 0$.

sea $q_n = \frac{\exp(2a_n) - 1}{2a_n}$, de acuerdo con (9) $q_n \rightarrow 1$, pues $2a_n \rightarrow 0$.

por lo tanto la sucesión $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \frac{1}{2}$, es decir $\ln \left((1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n) - 1}} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$, usando (7) se deduce que:

$$\exp \left(\ln \left((1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n) - 1}} \right) \right) \rightarrow \exp\left(\frac{1}{2}\right)$$

es decir

$$\lim(1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n) - 1}} = \exp\left(\frac{1}{2}\right)$$

Obs: Para poder usar la propiedad (6) y (8) es necesario que $(1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n) - 1}}$ sea positivo, pero como $a_n \rightarrow 0$

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}), (\forall n > n_0) \quad (1 + a_n) > 0$$

luego

$$(\forall n > n_0) \quad (1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n) - 1}} > 0$$

P5. Las tasas de interés en tres instituciones son 6 % anual, 0,5 % mensual y $100(e^{0,3\alpha} - 1)$ % cada cinco años, respectivamente. Ordene las instituciones de acuerdo a la rentabilidad obtenida en un depósito a cinco años, para los siguientes valores de α : 0, 1 y $\ln(3)$. Recuerde que si en un periodo de tiempo la tasa de interés es t % entonces, el capital aumenta en ese periodo en un factor $(1 + t/100)$.

Solución.

Consideremos que la tasa de interés de una institución es t % en un cierto periodo de tiempo. Supongamos que invertimos x unidades monetarias en dicha institución, entonces después de un periodo el capital cambia a:

$$x\left(1 + \frac{t}{100}\right)$$

después del segundo periodo tenemos:

$$x\left(1 + \frac{t}{100}\right)^2$$

así, para el n -ésimo periodo tendremos:

$$x\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$$

es decir el capital obtenido después del n -ésimo periodo, con una inversión x , es:

$$x\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$$

Ahora calculamos los periodos para cada tipo de depósitos y obtenemos:

Institución	t %	Número de periodos en 5 años	Capital final
1	6	5	$x(1 + \frac{6}{100})^5$
2	0.5	60	$x(1 + \frac{0.5}{100})^{60}$
3	$100(e^{0.3\alpha} - 1)$	1	$x(1 + \frac{100(e^{0.3\alpha} - 1)}{100})^1$

Evaluando esto se obtiene:

Institución	Capital final
1	$1,3382x$
2	$1,3488x$
3	$\alpha = 0 \quad x$ $\alpha = 1 \quad 1,34986x$ $\alpha = \ln(3) \quad 1,39038x$

de donde se puede concluir sobre la rentabilidad.

P6. Para la función $f(x) = \ln(1 + e^x)$, determine dominio, ceros, crecimiento y signos. Además, determine para que valores de y la ecuación $f(x) = y$ tiene solución. Use esta información para definir la función inversa. Repita el problema para la función $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Solución

Recordemos las siguientes propiedades:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^x > 0 \quad (11)$$

$$\text{Dom}[\ln(x)] = (0, +\infty) \quad (12)$$

$$e^x, \ln(x) \text{ son estrictamente crecientes} \quad (13)$$

$$\text{Si } h \text{ es creciente y } g \text{ es estrictamente creciente entonces } h + g \text{ es estrictamente creciente} \quad (14)$$

$$\text{Si } h \text{ y } g \text{ son est. crecientes entonces } g \circ h \text{ es est. creciente} \quad (15)$$

■ Analicemos $f(x) = \ln(1 + e^x)$

Dominio: de (11) se tiene que $1 + e^x > 0$, luego por (12) y (13) $\ln(1 + e^x)$ esta definido para todo x , es decir

$$\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R}$$

por otro lado de (11) tenemos que

$$1 + e^x > 1$$

aplicando logaritmo por (13)

$$\ln(1 + e^x) > \ln(1) = 0$$

luego $f(x) > 0$ y no posee ceros.

Crecimiento: por (13) e^x es est. creciente, luego por (14) $e^x + 1$ también lo es y por (15) $\ln(e^x + 1)$ es est. creciente, es decir $f(x)$ es est. creciente.

¿ $f(x) = y$?

$$\ln(1 + e^x) = y$$

aplicando exponencial

$$1 + e^x = e^y$$

es decir

$$e^x = e^y - 1$$

si $y > 0$, $e^y - 1 > 0$, luego por (12) podemos aplicar logaritmo para obtener

$$x = \ln(e^y - 1),$$

es decir para $y > 0$, la ecuación $f(x) = y$ posee solución.

Como f es est. creciente, es inyectiva y además $f(x) > 0$, luego si definimos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, f es biyectiva, podemos entonces, definir la función inversa como:

$$f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$$

donde $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

■ Ahora para $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Dominio: f esta definida para todo x , es decir $\text{Dom}[f(x)] = \mathbb{R}$.

Ceros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = 0$, luego $\text{Ceros}(f) = 0$.

Crecimiento: Usaremos los teoremas de funciones crecientes:

x es est. creciente, luego $-x$ es est. decreciente, entonces e^{-x} es est. decreciente, lo que a su vez implica que $-e^{-x}$ es est. creciente, por lo tanto $f(x)$ es est. creciente.

Signos:

$$f(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} > 1$$

$$\Leftrightarrow 2x > 0$$

luego $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ y dado que $f(0) = 0$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

¿ $f(x) = y$?:

$$f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = y$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

dado que $e^x > 0$ desechamos la solución con signo negativo, por lo tanto

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

y tomando logaritmo

$$x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right)$$

Ahora como f es est. creciente es inyectiva y es sobreyectiva (pues para todo y existe un x tal que $f(x) = y$), con esto podemos definir la función inversa de f como:

$$f^{-1}(x) = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right)$$

donde $f^{-1}(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Obs: La función $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ se llama “función seno hiperbólico” y su inversa se denomina “arco seno hiperbólico”.