# Semana 10

**P1.** Sea $\mu_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$. Calcular $\lim \frac{\mu_1 + \cdots + \mu_n}{n}$.
**Solución.**
Primero nos damos cuenta que:

$$\mu_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Ahora, para determinar el límite, tenemos que estudiar el comportamiento de $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$.

Por cada $i$ par que hay en la suma, sumamos 1. Si $n$ es par, entonces $\frac{n}{2}$ veces $i$ es par. Si $n$ es impar, entonces $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$ veces $i$ es par, donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función parte entera. Lo que quiero decir es, hay $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ números pares entre 1 y $n$. Luego, en cualquier caso, se cumple:

$$\frac{n-1}{2} \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i \leq \frac{n}{2}$$

Dividiendo esta desigualdad por $n$ y calculando límites,

$$\frac{n-1}{2} \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i \leq \frac{n}{2} \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{n}$$

$$\frac{n-1}{2n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i \leq \frac{1}{2} \qquad \Big/ \lim$$

$$\frac{1}{2} \leq \lim \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}{n} \leq \frac{1}{2}$$

Luego por sandwich concluimos que $\lim \frac{\mu_1 + \cdots + \mu_n}{n} = \frac{1}{2}$.
**P3.** Sea $(h_n)$ con $h_n > 0$ y $(\frac{1}{nh_n}) \to 0$. Demuestre que $\lim \frac{1}{(1+h_n)^n} = 0$.
**Solución.**
Como $h_n > 0 > -1$ por la desigualdad de Bernoulli se tiene que $(1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ donde $h_n$ este definida (que suponemos, son todos, salvo una cantidad finita). Luego,

$$0 \leq \frac{1}{(1+h_n)^n} \leq \frac{1}{1+nh_n} \leq \frac{1}{nh_n}$$

Como $\frac{1}{nh_n} \to 0$, cuando $n \to \infty$, concluimos por sandwich que $\lim \frac{1}{(1+h_n)^n} = 0$.
**P4.** Sea$(v_n)$ con $v_n \in (0, 1)$ y $(\frac{1}{nv_n}) \to 0$. Demuestre que $\lim(1 - v_n)^n = 0$.
**Solución.**
De la desigualdad de Bernoulli

$$(\forall h > -1)\ (1 + n)^n \geq 1 + nh$$

tomemos $h = -1 + \frac{1}{1-v_n} > -1$, pues $(v_n) \in (0, 1)$ (1) , entonces

$$\frac{1}{(1-v_n)^n} \geq 1 + n(-1 + \frac{1}{1-v_n}) = \frac{1 - v_n + nv_n}{1 - v_n}$$

pero por (1) $(1 - v_n + nv_n) \geq nv_n$ y $1 - v_n > 0$, luego

$$\frac{1 - v_n + nv_n}{1 - v_n} \geq \frac{nv_n}{1 - v_n}$$

entonces

$$\frac{1}{(1-v_n)^n} \geq \frac{nv_n}{1-v_n} \geq 0$$

por lo tanto

$$0 \leq (1-v_n)^n \leq \frac{1-v_n}{nv_n} = (1-v_n)\frac{1}{nv_n}$$

por (1) se tiene además que la sucesión $(1-v_n)$ es acotada y como la sucesión $\frac{1}{nv_n}$ es nula, usando algebra de límites se concluye que

$$\lim(1-v_n)^n = 0$$

**P5.** Sea $(u_n)$ una sucesión creciente. Probar que la sucesión definida por $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$ es creciente.

**Solución.**

Como $(u_n)$ es creciente, se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} u_n & \leq & u_{n+1} \\ u_{n-1} & \leq & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 & \leq & u_{n+1} \end{array}$$

Sumando estas desigualdades, tenemos que $u_1 + \cdots + u_n \leq nu_{n+1}$. Sumando $n(u_1 + \cdots + u_n)$ a la desigualdad, factorizando por $u_1 + \cdots + u_n$ el lado izquierdo y por $n$ el derecho, se obtiene

$$\begin{array}{rcl} (n+1)(u_1 + \cdots + u_n) & \leq & n(u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}) \\ \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n) & \leq & \frac{1}{n+1}(u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}) \\ v_n & \leq & v_{n+1} \end{array}$$

Por lo tanto, $(v_n)$ es creciente.

**P6.** Para $0 \leq a \leq b$ sea $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ e $y_1 = b$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$. Demostrar que ambas sucesiones poseen límite, que $\lim x_n = \lim y_n$ y que si llamamos $l$ a este último limite, se cumple que $\sqrt{ab} \leq l \leq \frac{a+b}{2}$.

**Solución.**

i) Demostremos que ambas sucesiones poseen límite, para ello probemos que $x_n$ e $y_n$ son monótonas y acotadas.

   1°. Notemos que

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{x_n + y_n}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{x_n})^2 + (\sqrt{y_n})^2}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n})^2 + 2\sqrt{x_n y_n}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n})^2}{2} + x_{n+1} \end{aligned}$$

   de donde

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n})^2}{2} \geq 0$$

   entonces

$$y_{n+1} \geq x_{n+1} \tag{1}$$

usando esto

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leq \frac{y_n + y_n}{2} = y_n$$

y por lo tanto

$$y_{n+1} \leq y_n \tag{2}$$

es decir la sucesión $y_n$ es decreciente , y por lo tanto $y_n \leq y_1 = b \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2º. usando (1) se deduce que

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} = \sqrt{x_n}\sqrt{y_n} \geq \sqrt{x_n}\sqrt{x_n} = x_n$$

entonces

$$x_{n+1} \geq x_n \tag{3}$$

es decir la sucesión $x_n$ es creciente, y por lo tanto $a = x_1 \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Usando todo lo anterior obtenemos:

$$a \leq x_n \leq y_n \leq b$$

es decir $x_n$ e $y_n$ son acotadas, usando el teorema de las sucesiones monótonas se deduce que $x_n$ e $y_n$ poseen límite.

ii) Probemos que $\lim x_n = \lim y_n$

De la definición de $y_{n+1}$:

$$2y_{n+1} = x_n + y_n$$

tomando lím a esta igualdad y utilizando álgebra de limites se tiene que

$$2 \lim y_{n+1} = \lim x_n + \lim y_n$$

pero $\lim y_{n+1} = \lim y_n$ y por lo tanto

$$\lim x_n = \lim y_n$$

iii) Usando (1) ,(2) y (3) simultáneamente tenemos que para $n \geq 2$

$$x_2 \leq x_n \leq y_n \leq y_2$$

tomando límite a esta expresión y llamando $l = \lim x_n = \lim y_n$ se obtiene:

$$\sqrt{ab} = x_2 \leq l \leq y_2 = \frac{a+b}{2}$$

**P7.** Sea $u_1 = a$ y $u_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2+u_n^2}{a+1}}$ con $0 < a < b$. Muestre que $(u_n)$ es acostada, que es convergente y calcule su límite.

**Solución.**

Acotada: Por inducción, veamos que $u_n \leq b \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Claramente $u_1 < b$. Supongamos que para algún $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq b$ y veamos que efectivamente $u_{n+1} \leq b$.

$$u_{n+1} \quad \leq \quad b \iff u_{n+1}^2 \leq b^2$$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} \leq b \iff \quad u_{n+1}^2 \leq & \quad b^2 && (4)\\
\iff \frac{ab^2 + u_n^2}{a+1} \leq & \quad b^2 \\
\iff ab^2 + u_n^2 \leq & b^2 + ab^2 \\
\iff \quad u_n^2 \leq & \quad b^2 \\
\iff \quad u_n \leq & \quad b && (5)
\end{aligned}$$

Donde (4) y (5) son equivalencias pues $u_n > 0$ y $b > 0$. Además, (5) es verdad por hipótesis de inducción, luego $(u_n)$ es acotada.

Convergente: Para esto, basta ver que es creciente, pues una sucesión creciente y acotada es convergente. El razonamiento es parecido al anterior:

$$
\begin{aligned}
u_n \leq u_{n+1} &\iff & u_n^2 &\leq u_{n+1}^2 && (6)\\
&\iff & u_n^2 &\leq \frac{ab^2 + u_n^2}{a+1} \\
&\iff & au_n^2 + u_n^2 &\leq ab^2 + u_n^2 \\
&\iff & au_n^2 &\leq ab^2 \\
&\iff & u_n &\leq b && (7)
\end{aligned}
$$

Donde (6) y (7) son equivalencias pues $u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Además, (7) es verdad por que $b$ es cota superior de la sucesión, luego $(u_n)$ es creciente y por lo tanto, convergente.

Límite: Llamemos $l = \lim u_n$ y notemos que $l > 0$ pues $u_n \geq a > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ya que es creciente y $u_1 = a$. Sabemos que $\lim u_{n+1} = l$, por el problema 6 de la semana 9.

Supongamos que es verdad que $\lim s_n = s \Rightarrow \lim s_n^2 = s^2$. Luego, $\lim u_{n+1}^2 = \lim u_n^2 = l^2$. Ahora,

$$
\begin{aligned}
\lim u_{n+1}^2 &= \lim \frac{ab^2 + u_n^2}{a+1} \\
l^2 &= \frac{ab^2 + l^2}{a+1} && (8)\\
al^2 + l^2 &= ab^2 + l^2 \\
l^2 &= b^2 \\
l &= b && (9)
\end{aligned}
$$

Donde el lado derecho de (8) se obtiene del álgebra de límites y (9) es porque $l > 0$.

Para concluir veamos que $\lim s_n = s \Rightarrow \lim s_n^2 = s^2$. Para esto basta ver que $(s_n^2 - s^2) \to 0$. En efecto, ya que $s_n^2 - s^2 = (s_n - s)(s_n + s)$, por álgebra de límites se tiene que:

$$\lim(s_n^2 - s^2) = \lim(s_n - s) \cdot \lim(s_n + s) = 0 \cdot 2s = 0.$$