Semana 9

Emilio Vilches & Felipe Serrano

Errores y sugerencias a evilches@dim.uchile.cl

P1. Calcular

$$\lim \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{\sqrt{n}}\cos(\frac{n^n}{n!}) + \frac{2n+1}{3-3n}}{\frac{2^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{1-\frac{n!}{n^n}}}$$

Solución:

La idea es poder separar el límite en el cociente de los límites y estos en la suma de los límites, es decir, ocupar relajadamente todas las propiedades del álgebra de límites. Para esto, tenemos que asegurarnos que cada uno de los límites exista por separado.

a) $\lim \frac{2}{n} = 2\lim \frac{1}{n} = 0$

b) $\lim \frac{3}{\sqrt{n}}\cos(\frac{n^n}{n!}) = 0$, pues $\cos(\frac{n^n}{n!})$ es una sucesión acotada que esta siendo multiplicada por $\frac{3}{\sqrt{n}}$, que es una sucesión nula.

c) $\lim \frac{2n+1}{3-3n} = -\frac{2}{3}$. Este es uno de los límite importante, un cociente de polinomios de igual grado. En este caso, el límite es el cociente de los coeficientes que acompañan a la mayor potencia del polinomio.

d) $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$. También es uno de los límite importante, en particular, es del último tipo que aparece en esa sección de la tutoría. ($\lim \frac{a^n}{n!}$, con $a \in \mathbb{R}$)

e) $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$, pues $(-1)^n$ es una sucesión acotada que esta siendo multiplicada por $\frac{1}{n}$, que es una sucesión nula.

f) $\lim \frac{1}{1-\frac{n!}{n^n}} = 1$. Para éste, observemos que $\frac{1}{1-\frac{n!}{n^n}}$, es el cociente de una sucesión constante (la sucesión que vale 1) con la sucesión $1 - \frac{n!}{n^n}$. Esta última es una diferencia entre una sucesión constante y $\frac{n!}{n^n}$. En los límites importantes vemos que $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$, luego por álgebra de límites, $\lim(1 - \frac{n!}{n^n}) = 1$. Por lo tanto, $\lim \frac{1}{1-\frac{n!}{n^n}} = 1$.

Como todos existen por separado y el límite del denominador es distinto de 0, concluimos, por álgebra de límites, que:

$$\lim \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{\sqrt{n}}\cos(\frac{n^n}{n!}) + \frac{2n+1}{3-3n}}{\frac{2^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{1-\frac{n!}{n^n}}} = -\frac{2}{3}$$

P2. Calcule $\lim p(n)\frac{a^n}{n^n}$ para $p(n)$ un polinomio de grado k, $k \in \mathbb{N}$.

Solución.

Notemos que

$$p(n)\frac{a^n}{n^n} = \frac{p(n)}{n^{k+1}}\frac{a^{k+1}a^{n-k-1}}{n^{n-k-1}}$$

Como $p(n)$ es un polinomio de grado k, existen $a_0, ..., a_k$ reales tales que

$$p(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + ... + a_1 n + a_0$$

luego

$$\frac{p(n)}{n^{k+1}} = \frac{a_k}{n} + \frac{a_{k-1}}{n^2} + ... + \frac{a_1}{n^k} + \frac{a_0}{n^{k+1}}$$

pero se sabe que

$$\frac{a_{k-i}}{n^{i+1}} \to 0 \ \forall i = 0...k$$

usando algebra de límites se tiene que:

$$\frac{p(n)}{n^{k+1}} \to 0$$

y como a^{k+1} es acotada (pues k es finito) y $\frac{p(n)}{n^{k+1}}$ es nula tenemos que

$$\frac{a^{k+1}p(n)}{n^{k+1}} \to 0$$

veamos que sucede con $\frac{a^{n-k-1}}{n^{n-k-1}}$, para ello consideremos $q_n = \frac{a}{n}$, sabemos que $q_n \to 0$, entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que:

$$0 \leq |\frac{a}{n}| \leq \frac{1}{2}$$

elevando a la potencia $n-k-1$

$$0 \leq |\frac{a}{n}|^{n-k-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1}$$

tomando límite, aplicando sandwich de sucesiones y como $\frac{1}{2^{n-k-1}} = \frac{2^{k+1}}{2^n} \to 0$ (pues 2^{k+1}es acotada y $\frac{1}{2^n} \to 0$) se tiene que

$$\frac{a^{n-k-1}}{n^{n-k-1}} \to 0$$

finalmente tenemos que $\frac{a^{n-k-1}}{n^{n-k-1}} \to 0$ y $\frac{p(n)}{n^{k+1}} \to 0$ y por álgebra de límites concluimos que

$$\lim p(n)\frac{a^n}{n^n} = 0$$

Obs1: Recordemos que el álgebra de límites dice: "Si $a_n \to a$ y $b_n \to b$ entonces, y sólo entonces $a_nb_n \to ab$", lo mismo ocurre para la suma y la resta, es decir la implicación es cierta solo en un sentido.

Obs2: Recuerden que el límite siempre se esta tomando sobre n, por ejemplo:

$$\lim \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$$

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

P3. Demuestre que si $\lim na_n$ existe entonces $\lim a_n = 0$.

Solución.

Sea $l = \lim na_n$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim a_n &= \lim \frac{1}{n} na_n \\ &= \lim na_n \cdot \lim \frac{1}{n} \qquad (1) \\ &= l \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donde el paso (1) se justifica diciendo que como ambos límites existen por separado, entonces el límite del producto es el producto de los límites.

P4. Si se sabe que para α y β positivos $\lim n\left(\sqrt{n^2+n+1}-(\alpha n+\beta)\right)$ existe, se pide calcular el valor de α y β, y luego el valor del límite.

Solución.

Recordemos tres propiedades de sucesiones:

(a) Si $\lim n a_n$ existe entonces $\lim a_n = 0$.

(b) $\lim(a_n - k) = 0$ si y sólo si $k = \lim a_n$.

(c) Si $\lim a_n = \ell \geq 0$ entonces $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{l}$.

Sea $a_n = \sqrt{n^2+n+1}-(\alpha n+\beta)$, por hipótesis tenemos que $\lim n a_n$ existe, luego por (a) $\lim a_n = 0$. luego

$$a_n = \sqrt{n^2+n+1}-(\alpha n+\beta) = \left(\sqrt{n^2+n+1}-\alpha n\right)-\beta$$

entonces por (b)

$$\beta = \lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\alpha n\right)$$

y con esto

$$\beta = \lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\alpha n\right) = \lim n\left(\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n}-\alpha\right)$$

sea $b_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n}-\alpha$, entonces $\beta = \lim n b_n$, es decir $\lim n b_n$ existe y por (a) $\lim b_n = 0$, por lo tanto

$$\lim\left(\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n}-\alpha\right) = 0$$

y de nuevo por (b)

$$\alpha = \lim\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n}$$

Calculemos α y β:

$$\alpha = \lim\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n} = \lim\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$$

donde el ultimo límite se justifica por (c).

$$\beta = \lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\alpha n\right) = \lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$$

racionalizando

$$\sqrt{n^2+n+1}-n = \frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} \to \frac{1}{2}$$

donde hemos usado (c) y álgebra de límites. Por lo tanto

$$\alpha = 1 \quad \beta = \tfrac{1}{2}$$

Calculemos finalmente $\lim n\left(\sqrt{n^2+n+1}-(\alpha n+\beta)\right)$;

$$\begin{aligned}\lim n\left(\sqrt{n^2+n+1}-(\alpha n+\beta)\right) &= \lim n\left(\sqrt{n^2+n+1}-(n+\frac{1}{2})\right)\\ &= \lim\frac{n(\frac{3}{4})}{\sqrt{n^2+n+1}+(n+\frac{1}{2})}\\ &= \lim\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+(1+\frac{1}{2n})}\\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

P5. Sean (a_n) y (b_n) tal que $\lim a_n = l$ y $\lim b_n = r$. Demuestre que $\lim \max\{a_n, b_n\} = \max\{l, r\}$

Solución. Para probar esto, nos vamos a basar en los siguientes resultados:

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}) \ \max\{a, b\} = \frac{|a-b| + a + b}{2} \tag{2}$$

$$\text{Si } s_n \text{ es tal que } \lim s_n = s, \text{ entonces } \lim |s_n| = |s| \tag{3}$$

Asumamos por ahora que son verdaderos.

Con esto, $\lim \max\{a_n, b_n\} = \lim \frac{|a_n - b_n| + a_n + b_n}{2}$. Para poder separar este límite en la suma de los límites y sacar el escalar (el $\frac{1}{2}$) fuera del límite, tenemos que asegurarnos de que existan todos los límites por separado. Claramente los límites de a_n y b_n existen por separado. Basta ver que $\lim |a_n - b_n|$ existe y, para resolver el problema, que vale $|l - r|$. Para esto, vemos que por álgebra de límites, $\lim(a_n - b_n) = l - r$. Luego, llamando $s_n = a_n - b_n$ y aplicando (3), tenemos que $\lim |a_n - b_n| = |l - r|$.

Así, tenemos que todos los límites por separado existen, luego podemos ocupar todas las propiedades del álgebra de límites:

$$\begin{aligned}
\lim \max\{a_n, b_n\} &= \lim \frac{|a_n - b_n| + a_n + b_n}{2} \\
&= \frac{1}{2}(\lim |a_n - b_n| + \lim a_n + \lim b_n) \\
&= \frac{1}{2}(|l - r| + l + r) \\
&= \max\{l, r\}
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad se tiene por (2).

Probaré (3). (2) queda propuesto.

Primero notamos que $(\forall a, b \in \mathbb{R}) \ ||a| - |b|| \leq |a - b|$. Sabemos que $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \geq n_0) \ |s_n - s| \leq \epsilon$ y por lo del principio de esta línea, $||s_n| - |s|| \leq |s_n - s|$. Luego por transitividad, se tiene que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \geq n_0) \ ||s_n| - |s|| \leq \epsilon$$

Es decir, $\lim |s_n| = |s|$.

P6. Sea $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función tal que para todo n, $t(n) \geq n$ y a_n una sucesión con $\lim a_n = l$. Demuestre que $\lim a_{t(n)} = l$.

Solución.

Como a_n converge a l, Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$ se tiene que $\mid a_n - l \mid < \epsilon$.

pero tenemos que $t(n) > n_0$ $\forall n > n_0$, luego

$$\forall n > n_0 \quad \mid a_{t(n)} - l \mid < \epsilon$$

por lo tanto $a_{t(n)}$ converge a l.