

## Semana 8

Emilio Vilches & Felipe Serrano

Errores y sugerencias a [evilches@dim.uchile.cl](mailto:evilches@dim.uchile.cl)

**P1.** Probar que  $\inf\{\frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\} = 0$ .

**Solución**

Denotemos por  $S$  el conjunto  $\{\frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ , notamos que  $S$  es no vacío y como los elementos en  $S$  son números positivos  $S$  es acotado inferiormente, luego por el axioma del supremo existe  $s := \inf S$ . Además por lo anterior se tiene que 0 es cota inferior de  $S$  y como el ínfimo es la mayor de todas las cotas inferiores se tiene que

$$0 \leq s$$

esto genera dos casos posibles:

$$s = 0 \quad \vee \quad s > 0$$

supongamos( para llegar a una contradicción) que  $s > 0$ , entonces por definición de ínfimo se tiene que

$$0 < s \leq \frac{1}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

lo que se puede escribir como

$$0 < s(2n+1) \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

lo cual contradice la propiedad arquimediana. Por lo tanto  $s = 0$ .

**P2.** Sea  $f$  una función creciente cuyo dominio es el intervalo  $[0, 1]$ . Demuestre que el conjunto  $f([0, 1])$  es acotado superiormente. Calcule el supremo del conjunto  $f([0, 1])$  y determine si posee máximo.

**Solución**

Sabemos que la función  $f$  es creciente luego

$$\forall x_1, x_2 \in [0, 1], \text{ si } x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

tomemos  $x_2 = 1$ , luego

$$f(x_1) \leq f(1) \quad \forall x_1 \in [0, 1]$$

por lo que  $f(1)$  es cota superior de  $f([0, 1])$ , con lo cual  $f([0, 1])$  es acotado superiormente. notemos que  $f([0, 1])$  es no vacío (pues contiene a  $f(1)$ ) y es acotado superiormente por lo tanto posee supremo. ahora si  $s$  es el supremo de  $f([0, 1])$  tenemos que  $f(1) \leq s$  y como  $f(1)$

es cota superior de  $f([0, 1])$  y  $s$  es la menor de todas las cotas superiores se tiene además que  $s \leq f(1)$  por lo que el supremo de  $f([0, 1])$  es  $f(1)$ , pero  $f(1) \in f([0, 1])$  con lo cual tenemos que es máximo también.

**Obs:** Otra forma de argumentar es decir que  $f(1)$  es cota superior y como está en  $f([0, 1])$ , será el máximo de este conjunto y por lo tanto será el supremo.

**P3.** Dados  $a$  y  $b$  reales, demuestre que si para cualquier  $\epsilon > 0$  se cumple que  $a \leq b + \epsilon$  entonces  $a \leq b$ .

**Solución.**

Notemos que

$$a \leq b + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

es equivalente a decir que

$$a - b \leq \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

y esto nos dice que  $a - b$  es cota inferior del conjunto  $\{\epsilon > 0\} = (0, \infty)$ , luego como el ínfimo es la mayor de todas las cotas inferiores y  $a - b$  es cota inferior se tiene que

$$a - b \leq \inf(0, \infty)$$

por lo tanto

$$a \leq b.$$

**P4.** Sean  $S$  y  $T$  subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}$  tales que para todo  $x \in S$  y para todo  $y \in T$   $x \leq y$ . Probar que  $S$  tiene supremo, que  $T$  tiene ínfimo y que

$$\sup(S) \leq \inf(T).$$

**Solución.**

Consideremos  $y \in T$ , así  $\forall x \in S$   $x \leq y$ , luego  $y$  es cota superior de  $S$  con lo cual  $S$  es acotado superiormente y como  $S$  es no vacío, posee supremo.

Consideremos ahora  $x \in S$ , así  $\forall y \in T$   $x \leq y$ , luego  $x$  es cota inferior de  $T$ , con lo cual  $T$  es acotado inferiormente y como  $T$  es no vacío, posee ínfimo.

Probemos ahora que  $\sup(S) \leq \inf(T)$ :

Sabemos que  $\forall x \in S, \forall y \in T \Rightarrow x \leq y$  fijemos  $y$ , como  $x \leq y$  se tiene que  $y$  es cota superior de  $S$ , pero como el supremo es la menor de todas las cotas superiores se concluye que

$$\sup(S) \leq y$$

y a partir de esto se puede ver que  $\sup(S)$  es cota inferior de  $T$ , pero como el ínfimo es la mayor de todas las cotas inferiores si  $\sup(S)$  es cota entonces

$$\sup(S) \leq \inf(T)$$

**P5.** Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$  no vacíos y acotados. Pruebe que si para todo  $x \in A$  y todo  $y \in B$  existe  $z \in C$  tal que  $x + y \leq z$  entonces

$$\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(C).$$

**Solución.**

Como  $A, B, C$  son no vacíos y acotados, tenemos que existen  $\sup(A)$ ,  $\sup(B)$  y  $\sup(C)$ . Consideremos  $y \in B$ , luego existe un  $z \in C$  tal que

$$\forall x \in A \quad x + y \leq z$$

luego  $x \leq z - y$ , por lo tanto  $z - y$  es cota superior de  $A$ , pero como el supremo es la menor de todas las cotas superiores se tiene que:

$$\sup(A) \leq z - y \quad \Rightarrow \quad y \leq z - \sup(A)$$

de esta forma  $z - \sup(A)$  es cota superior de  $B$ , repitiendo el argumento se obtiene que

$$\sup(B) \leq z - \sup(A) \quad \Rightarrow \quad \sup(A) + \sup(B) \leq z$$

pero  $z \leq \sup(C)$ , por lo tanto

$$\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(C).$$