

Semana 7

Emilio Vilches & Felipe Serrano

Errores y sugerencias a evilches@dim.uchile.cl

P1. Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\sin 2x = \cos \frac{x}{2}$$

Solución. Notemos que $\sin 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$, con esto la ecuación que debemos resolver queda como:

$$\cos(\frac{\pi}{2} - 2x) - \cos \frac{x}{2} = 0$$

ahora ocupamos la fórmula¹

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

con $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2x$ y $\beta = \frac{x}{2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} -2 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{x}{2}}{2} \right) \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{x}{2}}{2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi - 4k\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\pi - 4k\pi}{5} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

P2. (a) Demostrar que $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

(b) Utilizar lo anterior para resolver la ecuación $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

Solución.

(a) Primero notamos que

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \beta &= \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha) = \cos \left(\left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right) = \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (1)$$

¹notemos que pasar de una suma de cosenos a un producto de senos es en general un buen camino, puesto que es más fácil encontrar los ceros de un producto.

$$\cos(\beta) = \cos\left(\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad (2)$$

sumando (1) y (2) se obtiene lo pedido.

- (b) queremos resolver la ecuación $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$, para ello notamos que $1 = \cos(0)$, entonces

$$1 + \cos(x) = \cos(0) + \cos(x) = 2 \cos\left(\frac{0+x}{2}\right) \cos\left(\frac{0-x}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{-x}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos(2x) + \cos(3x) = 2 \cos\left(\frac{2x+3x}{2}\right) \cos\left(\frac{2x-3x}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{5x}{2}\right) \cos\left(\frac{-x}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{5x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

luego

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{5x}{2}\right) = 0$$

es decir debemos resolver la ecuación

$$2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{5x}{2}\right) = 0$$

factorizando

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{5x}{2}\right) \right) = 0$$

aplicando la propiedad de la parte (a) de nuevo, la ecuación queda:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot 2 \cos\left(\left(\frac{x}{2} + \frac{5x}{2}\right)/2\right) \cos\left(\left(\frac{x}{2} - \frac{5x}{2}\right)/2\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \cos(x) = 0$$

luego

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

ó

$$\cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

ó

$$\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

la solución será

$$\left\{ x \in \mathbb{R} / x = \pm \pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

P3. Resolver la ecuación

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1.$$

Solución.

Notemos que la ecuación a resolver se puede escribir como

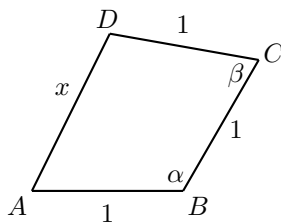
$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{3} \cos x + \cos \frac{\pi}{3} \sin x &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

por lo tanto

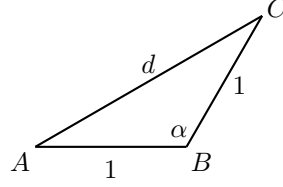
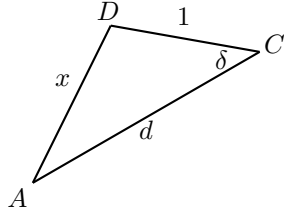
$$\begin{aligned} x + \frac{\pi}{3} &= k\pi + (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \quad k \in \mathbb{Z} \\ x &= k\pi - \frac{\pi}{3} + (-1)^k \frac{\pi}{6} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

P4. En un cuadrilátero A, B, C, D , conocemos los ángulos ABC, BCD, α y β respectivamente. Además se sabe que la longitud de los lados AB, BC y CD es 1. Probar que la longitud del cuarto lado AD es igual $\sqrt{3 - 2 \cos(\alpha) - 2 \cos(\beta) + 2 \cos(\alpha + \beta)}$.

Solución.



Consideremos los triángulos ABC y ACD como en la figura



Sea d la longitud del trazo AC , δ el ángulo $\angle ACD$. notemos que el triángulo ABC es isósceles, luego el ángulo $\angle BCA$ es $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, además se tiene que

$$\delta + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \beta$$

Apliquemos el teorema del coseno sobre éstos triángulos.
del triángulo ABC :

$$1 = 1 + d^2 - 2d \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

pero $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, entonces

$$1 = 1 + d^2 - 2d \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (3)$$

del triángulo ACD

$$x^2 = d^2 + 1 - 2d \cos(\delta)$$

reemplazando el valor de δ ;

$$x^2 = d^2 + 1 - 2d \cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

pero $\cos\left(\beta + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)$, entonces

$$x^2 = d^2 + 1 - 2d \sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) \quad (4)$$

de la ecuación (3)

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + d^2 - 2d \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \Rightarrow 0 &= d(d - 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)) \\ \Rightarrow d &= 0 \vee d = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

elegimos la solución $d = 2 \sin(\frac{\alpha}{2})$, pues $d = 0$ no tiene sentido.
reemplazando en la ecuación (4), se obtiene

$$x^2 = 4 \sin^2(\frac{\alpha}{2}) + 1 - 4 \sin(\frac{\alpha}{2}) \sin(\beta + \frac{\alpha}{2})$$

de donde se obtiene una expresión para el lado AD .

por otro lado se tiene la identidad

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\beta) = -2 \sin(\frac{\alpha}{2} + \beta) \sin(\frac{\alpha}{2})$$

luego

$$x^2 = 4 \sin^2(\frac{\alpha}{2}) + 1 + 2(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\beta))$$

y usando finalmente que $2 \sin^2(\frac{\alpha}{2}) = 1 - \cos(\alpha)$ se concluye que

$$x = \sqrt{3 - 2 \cos(\alpha) - 2 \cos(\beta) + 2 \cos(\alpha + \beta)}.$$