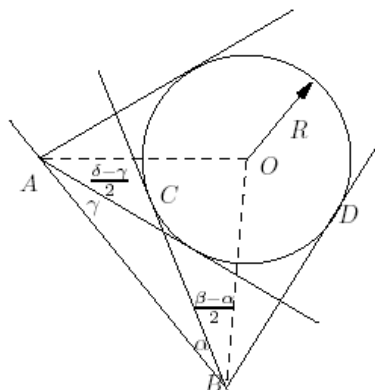


Pauta p6 semana 7

Denotemos por O el centro de la circunferencia y por C y D los puntos donde las rectas por B que son tangentes a la circunferencia se intersectan con ésta.



Notemos que el segmento \overline{BO} bisecta el ángulo CBD de lo cual se deduce que el ángulo CBO vale $\frac{\beta-\alpha}{2}$.

De manera análoga se deduce el ángulo $\frac{\delta-\gamma}{2}$ de la figura. Con esto podemos ahora concluir que el ángulo AOB vale $\pi - (\frac{\beta-\alpha}{2} + \alpha) - (\frac{\delta-\gamma}{2} + \gamma)$, es decir, $\pi - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}$.

Por el teorema del seno aplicado en el triángulo ΔAOB obtenemos

$$\frac{\sin(\pi - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2})}{AB} = \frac{\sin(\frac{\gamma+\delta}{2})}{OB}$$

con lo cual podemos expresar \overline{OB} en términos de cantidades conocidas

$$\begin{aligned}\overline{OB} &= \overline{AB} \frac{\sin(\frac{\gamma+\delta}{2})}{\sin(\pi - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2})} \\ &= \overline{AB} \frac{\sin(\frac{\gamma+\delta}{2})}{\sin(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2})}.\end{aligned}$$

Consideremos ahora el triángulo $\triangle BCO$ y notemos que el ángulo OCB es recto, por lo que

$$\sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) = \frac{R}{OB}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} R &= \overline{OB} \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \\ &= \overline{AB} \frac{\sin\left(\frac{\gamma + \delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}\right)} \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) \\ &= L \frac{\sin\left(\frac{\gamma + \delta}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Es posible obtener otras expresiones, como por ejemplo

$$R = L \frac{\sin(\frac{\beta+\alpha}{2}) \sin(\frac{\delta-\gamma}{2})}{\sin(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2})}.$$

Otras expresiones son todavía posibles, dado que en el problema los datos $L, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ no son independientes entre sí.