

- (i) Sea el punto  $C$  la base de la torre y sean  $l_1$  y  $l_2$  las medidas de los segmentos  $AC$  y  $BC$  respectivamente, entonces: **[0/0.25/0.5pto]**.

$$l_1 = \frac{H}{\tan \alpha} \quad l_2 = \frac{H}{\tan \beta}.$$

Por otro lado, el triángulo  $ABC$  se resuelve con el Teorema del coseno: **[0/0.5pto]**

$$l_2^2 = l_1^2 + L^2 - 2l_1 L \cos \gamma.$$

De las ecuaciones anteriores se encuentra la siguiente ecuación para  $H$ : **[0/0.25/0.5pto]**

$$\left( \frac{1}{\tan^2 \beta} - \frac{1}{\tan^2 \alpha} \right) H^2 + \frac{2L \cos \gamma}{\tan \alpha} H - L^2 = 0.$$

Si  $\alpha = \beta$  (claramente en este caso  $\cos \gamma \neq 0$  sino se tendría  $L = 0$ ) entonces **[0/0.5pto]**

$$H = \frac{L \tan \alpha}{2 \cos \gamma}.$$

Si  $\alpha > \beta$ , entonces: **[0/0.25/0.5pto]**

$$H = \frac{-\frac{2L \cos \gamma}{\tan \alpha} \pm \sqrt{\frac{4L^2 \cos^2 \gamma}{\tan^2 \alpha} + 4L^2 \left( \frac{1}{\tan^2 \beta} - \frac{1}{\tan^2 \alpha} \right)}}{2 \left( \frac{1}{\tan^2 \beta} - \frac{1}{\tan^2 \alpha} \right)}$$

Para elegir el buen signo de la raíz, notemos que como  $\alpha > \beta$ , entonces  $\tan \alpha > \tan \beta$  (función tangente creciente en el intervalo  $(0, \pi/2)$ ) y entonces  $1/\tan^2 \alpha < 1/\tan^2 \beta$  de donde elegimos signo  $+$  de modo que  $H > 0$ . **[0/0.25/0.5pto]**.