Semana 6

Emilio Vilches & Felipe Serrano

Errores y sugerencias a evilches@dim.uchile.cl

P2.

(a) Encuentre los ceros de la función: $f(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x) - 1 + \frac{1}{2}\sin(2x)$

(b) Demuestre la identidad

$$\frac{1}{\tan(3x) - \tan(x)} - \frac{1}{\cot(3x) - \cot(x)} = \cot(2x)$$

Solución

(a) notemos que por paridad $\cos(x) = \cos(-x)$ y por imparidad $\sin(x) = -\sin(-x)$, luego

$$\cos^3(x) + \sin^3(x) = \cos^3(-x) - \sin^3(-x)$$

ahora usando la indicación:

$$\begin{aligned}
\cos^3(-x) - \sin^3(-x) =& (\cos(-x) - \sin(-x))(\sin^2(-x) + \sin(-x)\cos(-x) + \cos^2(-x)) \\
=& (\cos(x) + \sin(x))(1 - \sin(x)\cos(x)) \\
=& (\cos(x) + \sin(x))(1 - \frac{\sin(2x)}{2})
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
f(x) =& (\cos(x) + \sin(x))(1 - \frac{\sin(2x)}{2}) - 1 + \frac{\sin(2x)}{2} \\
=& (\cos(x) + \sin(x))(1 - \frac{\sin(2x)}{2}) - (1 - \frac{\sin(2x)}{2}) \\
=& (\cos(x) + \sin(x) - 1)(1 - \frac{\sin(2x)}{2})
\end{aligned}$$

ahora encontremos los ceros de $f(x)$, es decir debemos hacer $f(x) = 0$, así $f(x) = 0$ ssi $(\cos(x) + \sin(x) - 1)(1 - \frac{\sin(2x)}{2}) = 0$ ssi $(\cos(x) + \sin(x) - 1) = 0$ ó $1 - \frac{\sin(2x)}{2} = 0$, pero $1 - \frac{\sin(2x)}{2} = 0$ ssi $\sin(2x) = 2$, lo cual no es posible pues 2 está fuera del recorrido de la función seno.
por lo tanto $f(x) = 0$ ssi $(\cos(x) + \sin(x) - 1) = 0$.
Resolvamos $(\cos(x) + \sin(x) - 1) = 0$, para ello multipliquemos esta ecuación por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y con esto

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{1}$$

pero $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$ entonces (1) se puede escribir como:

$$\sin(\frac{\pi}{4})\cos(x) + \cos(\frac{\pi}{4})\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{4})$$

usando la fórmula para la suma de ángulos

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$$

cuya solución es $x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

(b) en efecto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan(3x) - \tan(x)} - \frac{1}{\cot(3x) - \cot(x)} &= \frac{1}{\tan(3x) - \tan(x)} - \frac{1}{\frac{1}{\tan(3x)} - \frac{1}{\tan(x)}} \\ &= \frac{1}{\tan(3x) - \tan(x)} + \frac{\tan(3x)\tan(x)}{\tan(3x) - \tan(x)} \\ &= \frac{1 + \tan(3x)\tan(x)}{\tan(3x) - \tan(x)}\end{aligned}$$

pero

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\beta)\tan(\alpha)}$$

luego

$$\frac{1}{\tan(\alpha - \beta)} = \frac{1 + \tan(\beta)\tan(\alpha)}{\tan(\alpha) - \tan(\beta)} \tag{2}$$

tomando $\alpha = 3x$ y $\beta = x$ en (2) se obtiene

$$\frac{1}{\tan(3x - x)} = \cot(2x) = \frac{1 + \tan(3x)\tan(x)}{\tan(3x) - \tan(x)}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{\tan(3x) - \tan(x)} - \frac{1}{\cot(3x) - \cot(x)} = \cot(2x)$$

P4. Demuestre que $\forall \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes igualdades:

1.- $\sin(\beta)\sin(\gamma) = \frac{1}{2}(\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma))$

2.- $\sin(\beta)\cos(\gamma) = \frac{1}{2}(\sin(\beta - \gamma) + \sin(\beta - \gamma))$

Solución.

1.-

$$\cos(\beta+\gamma) = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma \tag{3}$$

$$\cos(\beta-\gamma) = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma \tag{4}$$

sumando (4) con -(3);

$$\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma) = \cos\beta\cos\gamma - \cos\beta\cos\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma$$

y así

$$\sin(\beta)\sin(\gamma) = \frac{1}{2}\left(\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)\right)$$

2.-

$$\sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta \tag{5}$$

$$\sin(\beta-\gamma) = \sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta \tag{6}$$

sumando (5) con (6)

$$\frac{\sin(\beta+\gamma) + \sin(\beta-\gamma)}{2} = \sin\beta\cos\gamma$$