

Semana 5

Emilio Vilches & Felipe Serrano

Errores y sugerencias a evilches@dim.uchile.cl

P1. Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| - \sqrt{1 - x^2}$.

- a) Determine $A = \text{Dom}(f)$, recorrido y paridad.
- b) Encuentre los ceros y los signos de f .
- c) Determine las zonas de crecimiento y de decrecimiento.
- d) Muestre que f no es inyectiva ni sobreyectiva.
- e) Determine el mayor subconjunto B , $B \subseteq A = \text{Dom}(f)$ tal que $f: B \rightarrow f(B)$ sea biyectiva y calcule $f^{-1}(x)$.

Solución

- a) (i) Para determinar $\text{Dom}(f)$, nos fijamos donde esta definida $\sqrt{1 - x^2}$, esto ocurre cuando $1 - x^2 \geq 0$, luego $\text{Dom}(f) = [-1, 1]$.
- (ii) Paridad: $f(-x) = |-x| - \sqrt{1 - (-x)^2} = |x| - \sqrt{1 - x^2} = f(x)$ luego f es par.
- (iii) Recorrido: Para $x \in [-1, 1]$, $0 \leq |x| \leq 1$ y $0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1$ entonces $-1 \leq |x| - \sqrt{1 - x^2} \leq 1$, y por lo tanto para todo $x \in [-1, 1]$, $-1 \leq f(x) \leq 1$, y así $\text{Rec}(f) = [-1, 1]$.
Notemos además que $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$.

- b) (i) Ceros de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow |x| - \sqrt{1 - x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow |x| &= \sqrt{1 - x^2} \\ \Leftrightarrow 2x^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(ii) Signos de f :

$$\begin{aligned}
 & f(x) > 0 \\
 \Leftrightarrow & |x| - \sqrt{1-x^2} > 0 \\
 \Leftrightarrow & |x| > \sqrt{1-x^2} \\
 \Leftrightarrow & 2x^2 > 1 & (x^2 \text{ es creciente en } \mathbb{R}^+) \\
 \Leftrightarrow & |x| > \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

por lo tanto $f(x) > 0$ ssi $x \in [-1, \frac{-1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$, y con esto $f(x) < 0$ ssi $x \in (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

c) Como f es par, bastara analizar para $x > 0$.

Probemos que f es estrictamente creciente en $(0, 1]$:

Sean $x_1, x_2 > 0$ con $x_1 < x_2$ entonces,

$$\begin{aligned}
 & x_1 < x_2 \\
 \Rightarrow & x_1^2 < x_2^2 & (x^2 \text{ creciente en } (0, 1]) \\
 \Rightarrow & -x_1^2 > -x_2^2 \\
 \Rightarrow & 1 - x_1^2 > 1 - x_2^2 \\
 \Rightarrow & \sqrt{1-x_1^2} > \sqrt{1-x_2^2} & (\text{raíz es creciente en } (0, 1]) \\
 \Rightarrow & -\sqrt{1-x_1^2} < -\sqrt{1-x_2^2}
 \end{aligned}$$

y sumando las inecuaciones

$$\begin{aligned}
 & |x_1| < |x_2| \\
 & -\sqrt{1-x_1^2} < -\sqrt{1-x_2^2}
 \end{aligned}$$

se obtiene

$$|x_1| - \sqrt{1-x_1^2} < |x_2| - \sqrt{1-x_2^2}$$

es decir $f(x_1) < f(x_2)$, por lo tanto f es est. creciente en $(0, 1]$.

Como f es par se tiene que f es est decreciente en $[-1, 0)$.

d) (i) Inyectividad: f no es inyectiva pues es una función par.

(ii) Sobreyectividad: f no es sobreyectiva pues $f(A) = [-1, 1] \neq \mathbb{R}$.

e) (i) Como $A = [-1, 1]$ y f es par, bastara escoger por ejemplo $B = [0, 1] \subseteq A$

y con esto, $f: [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$ es biyectiva y existe $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$.

(ii) Calculemos f^{-1} :

$$\begin{aligned}
 & f \circ f^{-1} = id \\
 \Rightarrow & |f^{-1}| - \sqrt{1 - (f^{-1})^2} = x \\
 \Rightarrow & f^{-1} - \sqrt{1 - (f^{-1})^2} = x \\
 \Rightarrow & f^{-1} = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2 - x^2}}{2}
 \end{aligned}
 \qquad (f^{-1}(x) \geq 0)$$

f) Gráfico de f y $|f|$:

