Semana 8

Problema 2. Sea f una función creciente cuyo dominio es el intervalo $[0,1]$. Demuestre que el conjunto $f([0,1])$ es acotado superiormente. Calcule el supremo del conjunto $f([0,1])$ y determine si posee máximo.

Solución

Sabemos que la función f es creciente luego

$$\forall x_1, x_2 \in [0,1], \text{ si } x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

tomemos $x_2 = 1$, luego

$$f(x_1) \leq f(1) \qquad \forall x_1 \in [0,1]$$

por lo que $f(1)$ es cota superior de $f([0,1])$, con lo cual $f([0,1])$ es acotado superiormente. notemos que $f([0,1])$ es no vacío (pues contiene a $f(1)$) y es acotado superiormente por lo tanto posee supremo. ahora si s es el supremo de $f([0,1])$ tenemos que $f(1) \leq s$ y como $f(1)$ es cota superior de $f([0,1])$ y s es la menor de todas las cotas superiores se tiene además que $s \leq f(1)$ por lo que el supremo de $f([0,1])$ es $f(1)$, pero $f(1) \in f([0,1])$ con lo cual tenemos que es máximo también.

Obs: otra forma de argumentar es decir que $f(1)$ es cota superior y como está en $f([0,1])$, será el máximo de este conjunto y por lo tanto será el supremo.

Problema 4.

Sean S y T subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que para todo $x \in S$ y para todo $y \in T$ $x \leq y$ Probar que S tiene supremo, que T tiene ínfimo y que

$$\sup(S) \leq \inf(T).$$

Solución.

Consideremos $y \in T$, así $\forall x \in S$ $x \leq y$, luego y es cota superior de S con lo cual S es acotado superiormente y como S es no vacío,posee supremo.

Consideremos ahora $x \in S$, así $\forall y \in T$ $x \leq y$, luego x es cota inferior de T, con lo cual T es acotado inferiormente y como T es no vacío, posee ínfimo.

Probemos ahora que $\sup(S) \leq \inf(T)$:

Sabemos que $\forall x \in S$, $\forall y \in T \Rightarrow x \leq y$ fijemos y, como $x \leq y$ se tiene que y es cota superior de S, pero como el supremo es la menor de todas las cotas superiores se concluye que

$$\sup(S) \leq y$$

y a partir de esto se puede ver que $\sup(S)$ es cota inferior de T, pero como el ínfimo es la mayor de todas las cotas inferiores si $\sup(S)$ es cota entonces

$$\sup(S) \leq \text{ínf}(T)$$

Problema 6.

Sean A, B y C subconjuntos de R no vacíos y acotados. Pruebe que si para todo $x \in A$ y todo $y \in B$ existe $z \in C$ tal que $x + y \leq z$ entonces

$$\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(C).$$

Solución.

Como A, B, C son no vacíos y acotados, tenemos que existen $\sup(A)$, $\sup(B)$ y $\sup(C)$. Consideremos $y \in B$, luego existe un $z \in C$ tal que

$$\forall x \in A \qquad x + y \leq z$$

luego $x \leq z - y$, por lo tanto $z - y$ es cota superior de A, pero como el supremo es la menor de todas las cotas superiores se tiene que:

$$\sup(A) \leq z - y \qquad \Rightarrow \qquad y \leq z - \sup(A)$$

de esta forma $z - \sup(A)$ es cota superior de B, repitiendo el argumento se obtiene que

$$\sup(B) \leq z - \sup(A) \qquad \Rightarrow \qquad \sup(A) + \sup(B) \leq z$$

pero $z \leq \sup(C)$, por lo tanto

$$\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(C).$$