

Semana 6

P2.

- (a) Encuentre los ceros de la función: $f(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x) - 1 + \frac{1}{2} \sin(2x)$
- (b) Demuestre la identidad

$$\frac{1}{\tan(3x) - \tan(x)} - \frac{1}{\cot(3x) - \cot(x)} = \cot(2x)$$

Solución

- (a) notemos que por paridad $\cos(x) = \cos(-x)$ y por imparidad $\sin(x) = -\sin(-x)$, luego

$$\cos^3(x) + \sin^3(x) = \cos^3(-x) - \sin^3(-x)$$

ahora usando la indicación:

$$\begin{aligned}\cos^3(-x) - \sin^3(-x) &= (\cos(-x) - \sin(-x))(\sin^2(-x) + \sin(-x)\cos(-x) + \cos^2(-x)) \\ &= (\cos(x) + \sin(x))(1 - \sin(x)\cos(x)) \\ &= (\cos(x) + \sin(x))(1 - \frac{\sin(2x)}{2})\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}f(x) &= (\cos(x) + \sin(x))(1 - \frac{\sin(2x)}{2}) - 1 + \frac{\sin(2x)}{2} \\ &= (\cos(x) + \sin(x))(1 - \frac{\sin(2x)}{2}) - (1 - \frac{\sin(2x)}{2}) \\ &= (\cos(x) + \sin(x) - 1)(1 - \frac{\sin(2x)}{2})\end{aligned}$$

ahora encontremos los ceros de $f(x)$, es decir debemos hacer $f(x) = 0$, así $f(x) = 0$ ssi $(\cos(x) + \sin(x) - 1)(1 - \frac{\sin(2x)}{2}) = 0$ ssi $(\cos(x) + \sin(x) - 1) = 0$ ó $1 - \frac{\sin(2x)}{2} = 0$, pero $1 - \frac{\sin(2x)}{2} = 0$ ssi $\sin(2x) = 2$, lo cual no es posible pues 2 está fuera del recorrido de la función seno.
por lo tanto $f(x) = 0$ ssi $(\cos(x) + \sin(x) - 1) = 0$.

Resolvamos $(\cos(x) + \sin(x) - 1) = 0$, para ello multipliquemos esta ecuación por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y con esto

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

pero $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$ entonces (1) se puede escribir como:

$$\sin(\frac{\pi}{4}) \cos(x) + \cos(\frac{\pi}{4}) \sin(x) = \sin(\frac{\pi}{4})$$

usando la fórmula para la suma de ángulos

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$$

cuya solución es $x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

(b) en efecto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan(3x) - \tan(x)} - \frac{1}{\cot(3x) - \cot(x)} &= \frac{1}{\tan(3x) - \tan(x)} - \frac{1}{\frac{1}{\tan(3x)} - \frac{1}{\tan(x)}} \\ &= \frac{1}{\tan(3x) - \tan(x)} + \frac{\tan(3x) \tan(x)}{\tan(3x) - \tan(x)} \\ &= \frac{1 + \tan(3x) \tan(x)}{\tan(3x) - \tan(x)} \end{aligned}$$

pero

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\beta) \tan(\alpha)}$$

luego

$$\frac{1}{\tan(\alpha - \beta)} = \frac{1 + \tan(\beta) \tan(\alpha)}{\tan(\alpha) - \tan(\beta)} \quad (2)$$

tomando $\alpha = 3x$ y $\beta = x$ en (2) se obtiene

$$\frac{1}{\tan(3x - x)} = \cot(2x) = \frac{1 + \tan(3x) \tan(x)}{\tan(3x) - \tan(x)}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{\tan(3x) - \tan(x)} - \frac{1}{\cot(3x) - \cot(x)} = \cot(2x)$$

P4. Demuestre que $\forall \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes igualdades:

$$1.- \sin(\beta) \sin(\gamma) = \frac{1}{2} (\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma))$$

$$2.- \cos(\beta) \cos(\gamma) = \frac{1}{2} (\sin(\beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma))$$

Solución.

1.-

$$\cos(\beta + \gamma) = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \quad (3)$$

$$\cos(\beta - \gamma) = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \quad (4)$$

sumando (4) con -(3);

$$\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma) = \cos \beta \cos \gamma - \cos \beta \cos \gamma + 2 \sin \beta \sin \gamma$$

y así

$$\sin(\beta) \sin(\gamma) = \frac{1}{2} (\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma))$$

2.-

$$\sin(\beta + \gamma) = \sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta \quad (5)$$

$$\sin(\beta - \gamma) = \sin \beta \cos \gamma - \sin \gamma \cos \beta \quad (6)$$

sumando (5) con (6)

$$\frac{\sin(\beta + \gamma) + \sin(\beta - \gamma)}{2} = \sin \beta \cos \gamma$$