Semana 7

P2.

(a) Demostrar que $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

(b) Utilizar lo anterior para resolver la ecuación $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

Solución.

(a) Primero notamos que

$$\alpha =(\frac{\alpha+\beta}{2}) + (\frac{\alpha-\beta}{2})$$
$$\beta =(\frac{\alpha+\beta}{2}) - (\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$\cos(\alpha) = \cos\left((\frac{\alpha+\beta}{2}) + (\frac{\alpha-\beta}{2})\right) = \cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) - \sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}) \quad (1)$$

$$\cos(\beta) = \cos\left((\frac{\alpha+\beta}{2}) - (\frac{\alpha-\beta}{2})\right) = \cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) + \sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}) \quad (2)$$

sumando (1) y (2) se obtiene lo pedido.

(b) queremos resolver la ecuación $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$, para ello notamos que $1 = \cos(0)$, entonces

- $$1 + \cos(x) = \cos(0) + \cos(x) = 2\cos(\frac{0+x}{2})\cos(\frac{0-x}{2}) \quad = 2cos(\frac{x}{2})\cos(\frac{-x}{2}) = 2\cos^2(\frac{x}{2})$$

- $$\cos(2x) + \cos(3x) = 2\cos(\frac{2x+3x}{2})\cos(\frac{2x-3x}{2}) \quad = 2\cos(\frac{5x}{2})\cos(\frac{-x}{2}) = 2\cos(\frac{5x}{2})\cos(\frac{x}{2})$$

luego

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 2\cos^2(\frac{x}{2}) + 2\cos(\frac{x}{2})\cos(\frac{5x}{2}) = 0$$

es decir debemos resolver la ecuación

$$2\cos^2(\frac{x}{2}) + 2\cos(\frac{x}{2})\cos(\frac{5x}{2}) = 0$$

factorizando

$$\cos(\frac{x}{2})\left(\cos(\frac{x}{2})+\cos(\frac{5x}{2})\right)=0$$

aplicando la propiedad de la parte (a) de nuevo, la ecuación queda:

$$\cos(\frac{x}{2})\cdot 2\cos\left((\frac{x}{2}+\frac{5x}{2})/2\right)\cos\left((\frac{x}{2}-\frac{5x}{2})/2)\right)=0$$

$$\cos(\frac{x}{2})\cos(\frac{3x}{2})\cos(x)=0$$

luego

$$\cdot \quad \cos(\tfrac{x}{2})=0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{x}{2}=\pm\tfrac{\pi}{2}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

ó

$$\cdot \quad \cos(\tfrac{3x}{2})=0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{3x}{2}=\pm\tfrac{\pi}{2}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

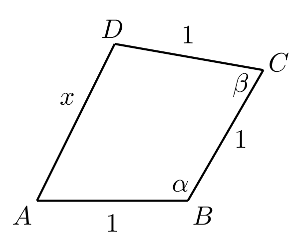
ó

$$\cdot \quad \cos(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\tfrac{\pi}{2}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

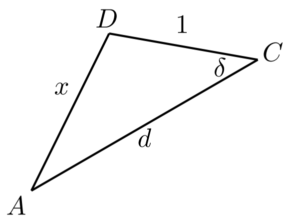
la solución será

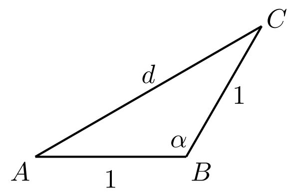
$$\left\{x\in\mathbb{R}/x=\pm\pi+4k\pi k\in\mathbb{Z}\ \vee\ x=\pm\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}k\pi k\in\mathbb{Z}\ \vee\ x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi k\in\mathbb{Z}\right\}$$

P4. En un cuadrilátero A, B, C, D, conocemos loa ángulos ABC, BCD, α y β respectivamente. Además se sabe que la longitud de los lados AB, BC y CD es 1. Probar que la longitud del cuarto lado AD es igual $\sqrt{3-2\cos(\alpha)-2\cos(\beta)+2\cos(\alpha+\beta)}$.
Solución.



Consideremos los triángulos ABC y ACD como en la figura





Sea d la longitud del trazo AC, δ el ángulo $\angle ACD$. notemos que el triángulo ABC es isósceles, luego el ángulo $\angle BCA$ es $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, además se tiene que

$$\delta + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \beta$$

Apliquemos el teorema del coseno sobre éstos triángulos.
del triángulo ABC:

$$1 = 1 + d^2 - 2d\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2})$$

pero $\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) = \sin(\frac{\alpha}{2})$, entonces

$$1 = 1 + d^2 - 2d\sin(\frac{\alpha}{2}) \tag{3}$$

del triángulo ACD

$$x^2 = d^2 + 1 - 2d\cos(\delta)$$

reemplazando el valor de δ;

$$x^2 = d^2 + 1 - 2d\cos(\beta + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2})$$

pero $\cos(\beta + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}) = \sin(\beta + \frac{\alpha}{2})$, entonces

$$x^2 = d^2 + 1 - 2d\sin(\beta + \frac{\alpha}{2}) \tag{4}$$

de la ecuación (3)

$$\begin{aligned} 1 =& 1 + d^2 - 2d\sin(\frac{\alpha}{2}) \\ \Rightarrow\ 0 =& d(d - 2\sin(\frac{\alpha}{2})) \\ \Rightarrow\ d = 0 \vee d = 2\sin(\frac{\alpha}{2}) \end{aligned}$$

elegimos la solución $d = 2\sin(\frac{\alpha}{2})$, pues $d = 0$ no tiene sentido.
reemplazando en la ecuación (4), se obtiene

$$x^2 = 4\sin^2(\frac{\alpha}{2}) + 1 - 4\sin(\frac{\alpha}{2})\sin(\beta + \frac{\alpha}{2})$$

de donde se obtiene una expresión para el lado AD.

por otro lado se tiene la identidad

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\beta) = -2\sin(\frac{\alpha}{2} + \beta)\sin(\frac{\alpha}{2})$$

luego

$$x^2 = 4\sin^2(\frac{\alpha}{2}) + 1 + 2(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\beta))$$

y usando finalmente que $2\sin^2(\frac{\alpha}{2}) = 1 - \cos(\alpha)$ se concluye que

$$x = \sqrt{3 - 2\cos(\alpha) - 2\cos(\beta) + 2\cos(\alpha + \beta)}.$$