Semana 5

P1. Sea $f\colon A \subseteq R \to R$ definida por $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$.

a) Determine $A = Dom(f)$, recorrido y paridad.

b) Encuentre los ceros y los signos de f.

c) Determine las zonas de crecimiento y de decrecimiento.

d) Muestre que f no es inyectiva ni sobreyectiva.

e) Determine el mayor subconjunto B, $B \subseteq A = Dom(f)$ tal que $f\colon B \to f(B)$ sea biyectiva y calcule $f^{-1}(x)$.

Solución

a) (i) Para determinar Dom(f), nos fijamos donde esta definida $\sqrt{1-x^2}$, esto ocurre cuando $1 - x^2 \geq 0$, luego Dom(f)= $[-1, 1]$.
(ii) Paridad: $f(-x) = |-x| - \sqrt{1-(-x)^2} = |x| - \sqrt{1-x^2} = f(x)$ luego f es par.
(iii) Recorrido: Para $x \in [-1, 1]$, $0 \leq |x| \leq 1$ y $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$ entonces $-1 \leq |x| - \sqrt{1-x^2} \leq 1$, y por lo tanto para todo $x \in [-1, 1]$, $-1 \leq f(x) \leq 1$, y así Rec (f)= $[-1, 1]$.
Notemos además que $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$.

b) (i) Ceros de f:

$$
\begin{aligned}
& & f(x) &= 0 \\
\Leftrightarrow & & |x| - \sqrt{1-x^2} &= 0 \\
\Leftrightarrow & & |x| &= \sqrt{1-x^2} \\
\Leftrightarrow & & 2x^2 &= 1 \\
\Leftrightarrow & & x &= \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

(ii) Signos de f:

$$
\begin{aligned}
& & f(x) > 0 & \\
&\Leftrightarrow & |x| - \sqrt{1-x^2} > 0 & \\
&\Leftrightarrow & |x| > \sqrt{1-x^2} & \\
&\Leftrightarrow & 2x^2 > 1 & \qquad (x^2 \text{ es creciente en } \mathbb{R}^+) \\
&\Leftrightarrow & |x| > \frac{1}{\sqrt{2}} &
\end{aligned}
$$

por lo tanto $f(x) > 0$ ssi $x \in [-1, \frac{-1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$, y con esto $f(x) < 0$ ssi $x \in (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

c) Como f es par,bastara analizar para $x > 0$.
Probemos que f es estrictamente creciente en $(0, 1]$:
Sean $x_1, x_2 > 0$ con $x_1 < x_2$ entonces,

$$
\begin{aligned}
& & x_1 < x_2 & \\
&\Rightarrow & x_1^2 < x_2^2 & \qquad (x^2 \text{ creciente en } (0,1]) \\
&\Rightarrow & -x_1^2 > -x_2^2 & \\
&\Rightarrow & 1 - x_1^2 > 1 - x_2^2 & \\
&\Rightarrow & \sqrt{1-x_1^2} > \sqrt{1-x_2^2} & \qquad (\text{raíz es creciente en } (0,1]) \\
&\Rightarrow & -\sqrt{1-x_1^2} < -\sqrt{1-x_2^2} &
\end{aligned}
$$

y sumando las inecuaciones

$$
\begin{aligned}
|x_1| &< |x_2| \\
-\sqrt{1-x_1^2} &< -\sqrt{1-x_2^2}
\end{aligned}
$$

se obtiene

$$|x_1| - \sqrt{1-x_1^2} < |x_2| - \sqrt{1-x_2^2}$$

es decir $f(x_1) < f(x_2)$, por lo tanto f es est. creciente en $(0, 1]$.
Como f es par se tiene que f es est decreciente en $[-1, 0)$.

d) (i) Inyectividad: f no es inyectiva pues es una función par.
(ii) Sobreyectividad: f no es sobreyectiva pues $f(A) = [-1, 1] \neq R$.

e) (i) Como $A = [-1, 1]$ y f es par, bastara escoger por ejemplo $B = [0, 1] \subseteq A$
y con esto, $f\colon [0, 1] \to [-1, 1]$ es biyectiva y existe $f^{-1}\colon [-1, 1] \to [0, 1]$.

(ii) Calculemos f^{-1} :

$$\begin{aligned}
& & f \circ f^{-1} &= id \\
&\Rightarrow & |f^{-1}| - \sqrt{1-(f^{-1})^2} &= x \\
&\Rightarrow & f^{-1} - \sqrt{1-(f^{-1})^2} &= x \qquad (f^{-1}(x) \geq 0) \\
&\Rightarrow & f^{-1} &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2-x^2}}{2}
\end{aligned}$$

f) Gráfico de f y $|f|$: