Semana 2

P1. *a*) Demuestre que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x, y > 0 \quad (x+y)(x^{-1}+y^{-1}) \geq 4.$$

indique qué axiomas o propiedades del orden está utilizando.

b) 1) Demuestre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \quad x^2 + \tfrac{2}{x} \geq 3.$$

Hint:Analice el producto $(x-1)^2(x+2)$

2) Demuestre que, para $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, se tiene:

$$a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2$$

Hint: Utilice la parte anterior.

Solución

a) primero notemos que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \tag{1}$$

en efecto $(x-y)^2 \geq 0$, es decir $x^2+y^2 \geq 2xy$, luego

$$\begin{aligned}
(x+y)(x^{-1}+y^{-1}) &= [(x+y)(x^{-1}+y^{-1})][(xy)(xy)^{-1}] && \text{(neutro } \cdot) \\
&= (x+y)[(x^{-1}+y^{-1})(xy)](xy)^{-1} && \text{(asociatividad)} \\
&= (x+y)[(x^{-1}(xy)+y^{-1}(xy))](xy)^{-1}] && \text{(distributividad)} \\
&= (x+y)[(x^{-1}x)y+(y^{-1}y)x](xy)^{-1}] && \text{(asociatividad y conmutatividad)} \\
&= (x+y)[y+x](xy)^{-1}] && \text{(inverso y neutro } \cdot) \\
&= (x^2+y^2+2xy)(xy)^{-1}] && \text{(cuadrado de binomio)} \\
&\geq (2xy+2xy)(xy)^{-1} && \text{(por (1))} \\
&= 4(xy)(xy)^{-1} && \text{(asociatividad)} \\
&= 4 && \text{(inverso } \cdot)
\end{aligned}$$

b) 1) notemos que $(x-1)^2(x+2) \geq 0$, si $x \geq 2$, luego si $x > 0$

$$\begin{aligned}
(x-1)^2(x+2) &\geq 0 \\
(x^2-2x+1)(x+2) &\geq 0 \\
x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2 &\geq 0 \\
x^3+2 &\geq 3x
\end{aligned}$$

multiplicando por $x^{-1} > 0$ (existe pues $x > 0$), se obtiene

$$x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$$

2) De la parte anterior sabemos que si $x > 0$, se tiene que

$$x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$$

Sean $a, b > 0$, poniendo $x = \frac{a}{b} > 0$ en la desigualdad anterior se obtiene

$$\frac{a^2}{b^2} + 2\frac{b}{a} \geq 3$$

multiplicando esto por $ab^2 > 0$,

$$a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2.$$

P2. *a*) Sea A el conjunto solución de la inecuación $|x| \leq |x-1|$ y sea B el conjunto solución de la inecuación $|4x-2| > x(1-2x)$.

1) Resuelva las inecuaciones, esto es, determine A y B.
2) Calcule $A \cup B$, $A \cap B$.

b) Resuelva la inecuación:

$$\frac{|x-2| + |2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2}.$$

c) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2+3x| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + |1+x^2|.$$

d) Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{|x^2-2x+1|}{|x^2-3x+2|} \leq 1.$$

e) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2-2x| + x|x+3| \geq 3$$

Solución

a) 1) A: Separamos el análisis de acuerdo a los puntos críticos, en este caso $x = 0$ y $x = 1$.
(i) si $x \in (-\infty, 0]$

$$\begin{aligned} & |x| \leq |x-1| \\ & \Leftrightarrow -x \leq -(x-1) \\ & \Leftrightarrow 0 \leq 1 \\ & \Rightarrow S_1 = \mathbb{R} \cap (-\infty, 0] = (-\infty, 0] \end{aligned}$$

(ii) si $x \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} & |x| \leq |x-1| \\ & \Leftrightarrow x \leq -(x-1) \\ & \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \\ & \Rightarrow S_2 = (-\infty, \frac{1}{2}] \cap (0, 1) = (0, \frac{1}{2}] \end{aligned}$$

(iii) si $x \in [1, \infty)$

$$\begin{aligned} & |x| \leq |x-1| \\ & \Leftrightarrow x \leq (x-1) \\ & \Leftrightarrow 0 \leq -1 \\ & \Rightarrow S_3 = \phi \cap [1, \infty) = \phi \end{aligned}$$

Luego la solución final esta dada por $A = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty, \frac{1}{2}]$
B: De nuevo separamos el análisis de acuerdo a los puntos críticos, en este caso $x = \frac{1}{2}$.
(i) si $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} & |4x-2| > x(1-2x) \\ & \Leftrightarrow 2(1-2x) > x(1-2x) \\ & \Leftrightarrow 2 > x \\ & \Rightarrow S_1 = (-\infty, 2) \cap (-\infty, \frac{1}{2}) = (-\infty, \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

notar que hemos ocupado el hecho de que si $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$, entonces $1 - 2x > 0$.
(ii) si $x = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} & |4x-2| > x(1-2x) \\ & \Leftrightarrow 0 > 0 \\ & \Rightarrow S_2 = \phi \cap \{\frac{1}{2}\} = \phi \end{aligned}$$

(iii) si $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$

$$\begin{aligned}
&|4x-2| > x(1-2x) \\
&\Leftrightarrow 2(2x-1) > -x(2x-1) \\
&\Leftrightarrow 2 > -x \\
&\Rightarrow S_3 = (-2, \infty) \cap (\frac{1}{2}, \infty) = (\frac{1}{2}, \infty)
\end{aligned}$$

notar que hemos ocupado el hecho de que si $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$, entonces $2x - 1 > 0$.
Luego la solución final esta dada por $B = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$.

2) (i) $A \cup B = (-\infty, \frac{1}{2}] \cup (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty) = \mathbb{R}$.
(ii) $A \cap B = (-\infty, \frac{1}{2}] \cap [(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)] = (-\infty, \frac{1}{2})$.

b) debemos resolver

$$\frac{|x-2| + |2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2}. \tag{2}$$

que también se puede escribir como

$$\frac{2|x-2| + 2|2x+11| - (x-2)|x+|x-2||}{2(x-2)|x+|x-2||} < 0.$$

pero $|x + |x-2||$ es siempre positivo, en efecto:
(i) si $x \geq 2$, $x + |x-2| = 2x - 2 \geq 0$.
(ii) si $x < 2$, $x + |x-2| = x - x + 2 = 2 > 0$.
luego encontrar el conjunto solución de (2) es equivalente a encontrar el conjunto solución de

$$\frac{2|x-2| + 2|2x+11| - (x-2)(x+|x-2|)}{(x-2)} < 0. \tag{3}$$

Ahora los puntos críticos de (3) son $x = 2$ y $x = -\frac{11}{2}$, luego
(i) si $x \in (-\infty, -\frac{11}{2})$,

$$\begin{aligned}
&\frac{-2(x-2) - 2(2x+11) - (x-2)(x-(x-2))}{(x-2)} < 0 \\
&\Leftrightarrow -2x + 4 - 4x - 22 - x^2 + 2x + x^2 - 4x + 4 > 0 \\
&\Leftrightarrow -8x - 14 > 0 \\
&\Leftrightarrow x < -\frac{7}{4} \\
&\Rightarrow S_1 = (-\infty, -\frac{7}{4}) \cap (-\infty, -\frac{11}{2}) = (-\infty, -\frac{11}{2}).
\end{aligned}$$

(ii) si $x \in (-\frac{11}{2}, 2)$,

$$\begin{aligned}
&\frac{-2(x-2) + 2(2x+11) - (x-2)(x-(x-2))}{(x-2)} < 0 \\
&\Leftrightarrow -2x + 4 + 4x + 22 - 2x + 4 > 0 \\
&\Leftrightarrow 30 > 0 \\
&\Rightarrow S_2 = \mathbb{R} \cap (-\frac{11}{2}, 2) = (-\frac{11}{2}, 2).
\end{aligned}$$

(iii) si $x \in (2, \infty)$,

$$\begin{aligned}
&\frac{2(x-2)+2(2x+11)-(x-2)(x+(x-2))}{(x-2)} < 0 \\
&\Leftrightarrow 2x-4+4x+22-(x-2)(2x-2) < 0 \\
&\Leftrightarrow x^2-6x-7 > 0 \\
&\Leftrightarrow (x-7)(x+1) > 0 \\
&\Rightarrow S_3 = \Big[(-\infty,-1)\cup(7,\infty)\Big] \cap (2,\infty) = (7,\infty).
\end{aligned}$$

(iv) veamos si los puntos críticos satisfacen (2),
$x = 2$, no satisface, pues no se puede anular el denominador.
$x = -\frac{11}{2}$, si satisface pues

$$\frac{|-\frac{11}{2}-2|+|0|}{(-\frac{11}{2}-2)|-\frac{11}{2}+|-\frac{11}{2}-2||} = -\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$$

Finalmente la solución de (2) es

$$S_f = (-\infty, 2) \cup (7, \infty).$$

c) Primero notamos que $1 + x^2 > 0$, luego $|1 + x^2| = 1 + x^2$, luego debemos resolver

$$|x^2+3x| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + 1 + x^2.$$

es decir

$$\begin{aligned}
&|x^2+3x| + x|x+3| \geq 8. \\
&\Leftrightarrow (|x|+x)|x+3| \geq 8.
\end{aligned}$$

cuyos puntos críticos son $x = -3$, $x = 0$.
(i) si $x \in (-\infty, -3)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (|x|+x)|x+3| \geq 8 \\
&\Leftrightarrow (-x+x)[-(x+3)] \geq 8 \\
&\Leftrightarrow 0 \geq 8 \\
&\Rightarrow S_1 = \phi \cap (-\infty,-3) = \phi.
\end{aligned}$$

(ii) si $x \in (-3, 0)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (|x|+x)|x+3| \geq 8 \\
&\Leftrightarrow (-x+x)[(x+3)] \geq 8 \\
&\Leftrightarrow 0 \geq 8 \\
&\Rightarrow S_2 = \phi \cap (-3,0) = \phi.
\end{aligned}$$

(iii) si $x \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (|x| + x)|x+3| \geq 8 \\
&\Leftrightarrow (x + x)[(x+3)] \geq 8 \\
&\Leftrightarrow x(x+3) \geq 4 \\
&\Leftrightarrow (x+4)(x-1) \geq 0 \\
&\Rightarrow S_3 = \Big[(-\infty, -4] \cup [1, \infty)\Big] \cap (0, \infty) = [1, \infty)
\end{aligned}$$

(iv) veamos si los puntos críticos satisfacen: $x = 0$, no satisface pues sino se tendría que $0 \geq 8$.
$x = -3$, no satisface por la misma razón.
Por lo tanto la solución final es

$$S_f = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [1, \infty)$$

d) debemos encontrar la solución de la inecuación

$$\frac{|x^2 - 2x + 1|}{|x^2 - 3x + 2|} \leq 1. \tag{4}$$

que se puede escribir como

$$\frac{|x-1||x-1|}{|x-2||x-1|} \leq 1. \tag{5}$$

luego notamos que $x = 1$ y $x = 2$, no pueden satisfacer (4), por lo tanto podemos suponer que $x \neq 1$ y $x \neq 2$, así (4), es equivalente a

$$|x - 1| \leq |x - 2|$$

cuyos puntos críticos son $x = 1$ y $x = 2$.
(i) si $x \in (-\infty, 1)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow |x-1| \leq |x-2| \\
&\Leftrightarrow -x + 1 \leq -x + 2 \\
&\Leftrightarrow 1 \leq 2 \\
&\Rightarrow S_1 = \mathbb{R} \cap (-\infty, 1) = (-\infty, 1).
\end{aligned}$$

(ii) si $x \in (1, 2)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow |x-1| \leq |x-2| \\
&\Leftrightarrow x - 1 \leq -x + 2 \\
&\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2} \\
&\Rightarrow S_2 = (1, 2) \cap (-\infty, \frac{3}{2}] = (1, \frac{3}{2}].
\end{aligned}$$

(iii) $x \in (2, \infty)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow |x-1| \leq |x-2| \\
&\Leftrightarrow x-1 \leq x-2 \\
&\Leftrightarrow -1 \leq -2 \\
&\Rightarrow S_3 = \phi \cap (2, \infty) = \phi.
\end{aligned}$$

Luego la solución de (4) es

$$S_f = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty, 1) \cup (1, \frac{3}{2}].$$

e) debemos encontrar el conjunto solución de la inecuación

$$|x||x-2| + x|x+3| \leq 3 \tag{6}$$

cuyos puntos críticos son $x = -3$, $x = 0$, $x = 2$.
(i) si $x \in (-\infty, -3)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow |x||x-2| + x|x+3| \geq 3 \\
&\Leftrightarrow x(x-2) - x(x+3) \geq 3 \\
&\Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{5} \\
&\Rightarrow S_1 = (-\infty, -3) \cap (-\infty, \frac{3}{5}] = (-\infty, -3).
\end{aligned}$$

(ii) si $x \in (-3, 0)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow |x||x-2| + x|x+3| \geq 3 \\
&\Leftrightarrow x(x-2) + x(x+3) \geq 3 \\
&\Leftrightarrow 2(x-1)(x+\frac{3}{2}) \geq 0 \\
&\Rightarrow S_2 = \left[(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [1, \infty)\right] \cap (-3, 0) = (-3, -\frac{3}{2}].
\end{aligned}$$

(iii) si $x \in (0, 2)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow |x||x-2| + x|x+3| \geq 3 \\
&\Leftrightarrow -x(x-2) + x(x+3) \geq 3 \\
&\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{5} \\
&\Rightarrow S_3 = [\frac{3}{5}, \infty) \cap (0, 2) = [\frac{3}{5}, 2).
\end{aligned}$$

(iv) si $x \in (2, -\infty)$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow |x||x-2| + x|x+3| \geq 3\\
&\Leftrightarrow x(x-2) + x(x+3) \geq 3\\
&\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 3 \geq 0\\
&\Leftrightarrow 2(x-1)(x+\frac{3}{2}) \geq 0\\
&\Rightarrow S_3 = [(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [1, \infty)] \cap (2, \infty) = (2, \infty).
\end{aligned}
$$

(v) veamos si los puntos críticos satisfacen (6).
$x = -3$, si satisface pues $|-3||-3-2| = 15 \geq 3$.
$x = 0$, no satisface pues sino $0 \geq 3$.
$x = 2$, si satisface pues $2|2+3| = 10 \geq 3$.
$S_5 = \{-3, 2\}$
Finalmente la solución de (6) es

$$S_f = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 = (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{5}, \infty).$$