

Guía N° 1

P1.- Caracterizaciones árboles

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Pruebe que las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (1) G es árbol.
- (2) G conexo y $|E| = |V| - 1$.
- (3) G es conexo y $\forall e \in E$ el grafo $(V, E \setminus \{e\})$ no es conexo.
- (4) $\forall x, y \in V$ existe un único camino en G entre x e y .
- (5) G es acíclico y $\forall e \in \mathcal{P}_2(V) \setminus E$ el grafo $(V, E \cup \{e\})$ tiene un ciclo.
- (6) G es acíclico y $|E| = |V| - 1$.

Indicación: Recuerde que si $G = (V, E)$ es un grafo y r el número de partes conexas de G entonces $r \geq |V| - |E|$. Además, si G es acíclico entonces $r \leq |V| - |E|$.

P2.- Suponga que tiene una red $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$, con costos a_{ij} , $\forall (i, j) \in \mathcal{A}$.

- a) Pruebe que si modifica los costos $\bar{a}_{ij} = a_{ij} + c$, con $c \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria, entonces las rutas mínimas, en general, cambian. *Indicación:* basta que muestre un ejemplo donde las rutas mínimas cambien.
- b) Considere la siguiente modificación en los costos

$$a'_{ij} = a_{ij} + \delta_i - \delta_j$$

con $\delta_i \in \mathbb{R}$.

- b.1) Pruebe que este cambio en los costos no cambia las rutas mínimas.
- b.2) Demuestre que existe un ciclo con costo negativo en costos originales a_{ij} si y sólo si existe un ciclo de costo negativo en costos modificados a'_{ij} .
- b.3) Muestre que el problema de rutas mínimas de uno a todos tiene solución si y sólo si existe una asignación de los valores δ_i tal que $a'_{ij} \geq 0$, $\forall (i, j) \in \mathcal{A}$, es decir, todos los costos modificados son positivos. *Indicación:* recuerde que existe solución del problema si y sólo si la red no posee ciclos con costo negativo.

P3.- Modificar el algoritmo de Dijkstra de manera de resolver el problema del *cuello de botella*: encontrar un camino entre dos vértices cuyo arco más caro sea lo más barato posible.

P4.- Se tienen n fichas de dominó en fila:

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) \cdots (a_n, b_n)$$

Las fichas se pueden rotar, es decir, pueden estar orientada (a_i, b_i) o (b_i, a_i) , pero no se pueden intercambiar dos fichas de lugar.

Se define la variación de dos fichas contiguas i y j , Δ_{ij} , como:

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} |b_i - a_j|, & \text{si están orientadas } (a_i, b_i)(a_j, b_j) \\ |b_i - b_j|, & \text{si están orientadas } (a_i, b_i)(b_j, a_j) \\ |a_i - a_j|, & \text{si están orientadas } (b_i, a_i)(a_j, b_j) \\ |a_i - b_j|, & \text{si están orientadas } (b_i, a_i)(b_j, a_j) \end{cases}$$

Se quiere minimizar, $\sum_{i=1}^{n-1} \Delta_{ii+1}$, la suma total de las variaciones de fichas contiguas. Escriba este problema como un problema de rutas mínimas. Explícite nodos, arcos, costos, etc.

P5. – Se dice que un grafo dirigido $G = (V, E)$ posee un *orden topológico* si podemos ordenar los elementos de V como $v_1, v_2, \dots, v_n$, donde $n = |V|$, de manera tal que $(v_i, v_j) \in E \Rightarrow i < j$, es decir, si hay un arco hacia adelante desde el nodo v_i al nodo v_j , entonces en el orden el nodo v_i “está antes” que el nodo v_j .

Considere un grafo dirigido $G = (V, E)$.

a) Demuestre que

G posee un orden topológico $\Rightarrow G$ no tiene ciclos dirigidos

b) Pruebe que si G no tiene ciclos dirigidos entonces existe $v \in V$ que no posee arcos salientes, es decir, no hay arcos de la forma (v, w) , con $w \in V$.

c) Muestre que

G no tiene ciclos dirigidos $\Rightarrow G$ posee un orden topológico

Indicación: Use inducción en $n = |V|$ y en el paso inductivo ocupe la parte anterior.

Ahora considere $G = (V, E)$ sin ciclos dirigidos. Y considere para V el orden topológico $v_1, v_2, \dots, v_n$. Nos interesa encontrar las ruta mínimas del nodo v_1 al resto de los nodos.

A continuación describiremos una particularización del **Algoritmo de Ford-Bellman**, para el caso G sin ciclos dirigidos, de orden $O(|E|)$, es decir, demora a lo más $|E|$ pasos¹.

ALGORITMO DE FORD-BELLMAN PARA G SIN CICLOS DIRIGIDOS

Inicialización: Sea $i = 1$. La inicialización de las etiquetas d_{v_i} es como sigue:

$$d_{v_i} = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ \infty & \text{si no} \end{cases}$$

(1) Para cada arco $(v_i, u) \in E$

■ Si $d_u > d_{v_i} + c_{v_i u}$, se actualiza $d_u = d_{v_i} + c_{v_i u}$.

(2) Si $i = n$ parar. Si no, hacer $i = i + 1$.

d) Pruebe que en la i -ésima etapa del algoritmo, para cualquier $u \in V$, d_u representa el costo de una ruta mínima de v_1 a u entre todas las rutas de v_1 a u que usan nodos en $\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$. Concluya que al final del algoritmo d_u es exactamente el costo de la ruta mínima de v_1 a u .

e) Probar que el algoritmo antes descrito demora a lo más $|E|$ pasos.

¹Recuerde que el **Algoritmo de Ford-Bellman** genérico es de orden $O(|E||V|)$

P6.- Teorema de König-Egerváry

Consideremos un arreglo rectangular de $m \times n$ celdas, algunas de las cuales han sido designadas como *importantes*. Las filas y columnas del arreglo las llamaremos *líneas*.

Un conjunto de líneas se llamará un *cubrimiento* si todas las celdas designadas como *importantes* pertenecen a alguna de estas líneas.

Por otra parte, un conjunto S de celdas *importantes* se dirá *independiente* si ningún par de celdas en S pertenece a la misma línea.

En este ejercicio demostraremos el siguiente resultado:

TEOREMA de König-Egerváry:

El cubrimiento de tamaño mínimo posee el mismo número de elementos que el conjunto independiente de tamaño máximo, es decir:

$$\min\{|C| : C \text{ es un cubrimiento}\} = \max\{|I| : I \text{ es un conjunto independiente}\}$$

Para demostrar este teorema, consideremos un grafo auxiliar $G = (V, E)$ que construiremos de la siguiente manera:

- $V = \{s, t\} \cup R \cup C \cup I$, donde R es el conjunto de las filas, C es el conjunto de las columnas e I el conjunto de las celdas importantes.
- El conjunto de los arcos E , con las capacidades asociados a cada uno de sus arcos, se describe a continuación:
 - Arcos (s, r) , $\forall r \in R$ y arcos (c, t) , $\forall c \in C$. Todos estos arcos tendrán capacidad 1.
 - $\forall i \in I$, consideramos los arcos (r_i, i) , (i, c_i) , donde r_i , c_i son, respectivamente, la fila y columna correspondientes a la celda importante i . Todos estos arcos se tendrán capacidad infinita.
 - La cota inferior es 0 para todos los arcos.

Nos interesa resolver el problema de flujo máximo desde el nodo s al nodo t .

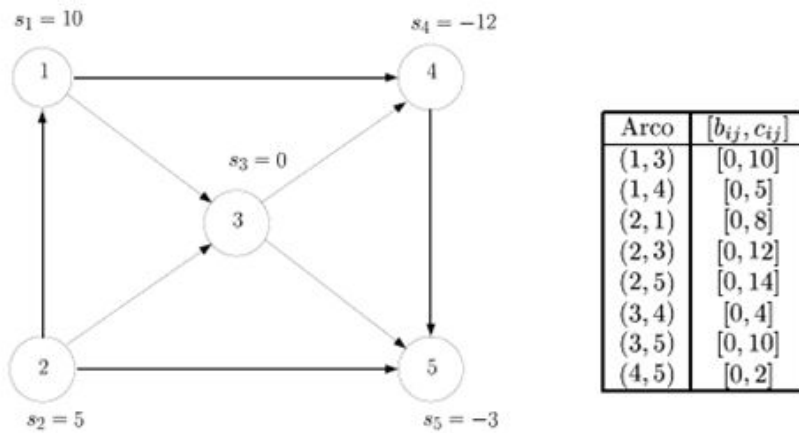
- a) Pruebe que un flujo factible x , entero (es decir, $x_e \in \mathbb{Z}$, $\forall e \in E$) puede ser asociado a un conjunto independiente y, recíprocamente, que todo conjunto independiente puede ser asociado a un flujo factible entero.
- b) Demuestre que un (s, t) -corte de capacidad finita puede ser asociado a un cubrimiento y que todo cubrimiento puede ser asociado a un corte de capacidad finita.
- c) Concluya el teorema, usando el *Teorema de Flujo máximo-corte mínimo*.
- d) Describir cómo se recupera un cubrimiento de cardinalidad máxima, a partir del flujo óptimo.

P7.- Dado un conjunto de divergencias s_i que satisfacen $\sum_i s_i = 0$ e intervalos de capacidad $[0, c_{ij}]$, considere el siguiente problema de factibilidad, es decir, encontrar x que satisfaga

$$\sum_{j \in O(i)} x_{ij} - \sum_{j \in D(i)} x_{ji} = s_i \quad \forall i \in N$$

$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall (i, j) \in A$$

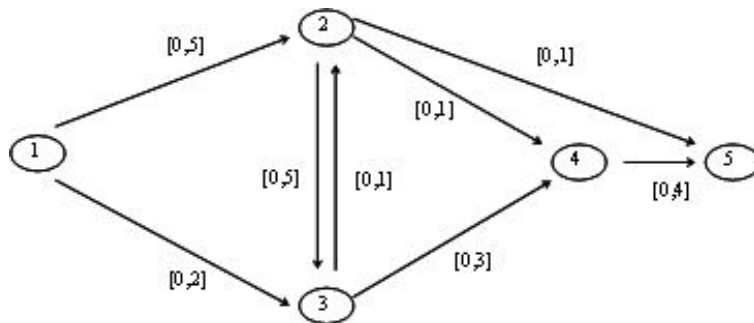
donde N y A representan el conjunto de nodos y arcos de una red, respectivamente.



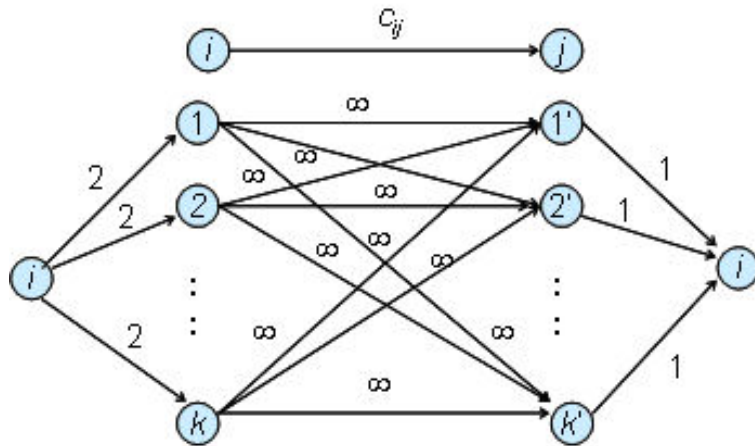
- a) Formule un problema de máximo flujo cuya solución es equivalente al problema de factibilidad (F) ¿Qué condición debe cumplir tal solución del problema de máximo flujo para poder asegurar factibilidad del problema (F) ?
- b) Considere el siguiente ejemplo:

Encuentre el problema de máximo flujo asociado, resuélvalo y pronúnciese respecto de la factibilidad de encontrar un vector de flujo x que sea solución de (F) para este ejemplo.

- P8. – Considere la red de la figura, donde se indica las cotas inferior y superior de flujo de cada arco $[b_{ij}, c_{ij}]$. Aplique el algoritmo de Ford-Fulkerson para encontrar el máximo flujo desde $s = 1$ hasta $t = 5$. Verifique que se cumple el teorema max-flujo/min-corte en tal caso.



P9.- Aplique el algoritmo genérico preflow-push al problema de máximo flujo para la red de la figura ($b_{ij} = 0 \quad \forall(i, j)$).



Siempre examine un nodo con la etiqueta de distancia mínima y resuelva empates a favor del nodo con menor número de identificación del nodo. ¿Cuántos empujes (pushes) saturados y no saturados hace el algoritmo?

P10.- Considere el problema de k -coloreo, el cual consiste colorear, con alguno de k colores dados, cada uno de los nodos de un grafo de tal manera que para todo arco (i, j) , los nodos i y j no posean el mismo color.

- Suponga que queremos elegir los colores de los países en un mapa del mundo de tal manera que ningún par de países adyacentes posea el mismo color. Muestre que si el número de colores disponibles es k , el problema puede ser formulado como un k -coloreo.
- Pruebe que el problema de k -coloreo tiene solución si y sólo si el conjunto de los nodos puede ser particionado en k o menos subconjuntos disjuntos tal que ningún arco conecta 2 nodos pertenecientes al mismo subconjunto.
- Demuestre que, cuando el grafo es un árbol, el problema de 2-coloreo posee solución. HINT: Primero coloree un nodo cualquiera i y luego coloree el resto de los nodos basados en su “distancia” a i .
- Muestre que si cada nodo posee a lo más $k - 1$ vecinos, entonces el problema de k -coloreo posee solución.

- P11.-
- En nuestra discusión acerca de algoritmos de rutas mínimas, a menudo asumimos que la red no contiene arcos paralelos (es decir, no existen múltiples arcos con los mismos nodos cabeza y cola). ¿Cómo resolvería usted un problemas de rutas mínimas en una red con arcos paralelos?
 - Demuestre que en el problema de rutas mínimas, si el largo de algún arco decrece en k unidades, la distancia mínima entre cualquier par de nodos decrece a lo más en k unidades.

P12.- 1. Considere el problema de flujo a costo mínimo con las restricciones adicionales de que la cantidad total de flujo saliente de cada nodo i debe pertenecer al intervalo $[l_i, u_i]$, es decir,

$$l_i \leq \sum_{\{j:(i,j) \in \mathcal{A}\}} x_{ij} \leq u_i$$

Formule este problema como uno de flujo a costo mínimo standard, separando cada nodo en 2 nodos y agregando un arco que los conecte.

2. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando brevemente su respuesta.

- I. Si todos los arcos de una red tienen costo diferente, es decir, $\forall(i, j) \neq (l, k)$ sse tiene $a_{ij} \neq a_{lk}$, entonces la red posee un único árbol de rutas mínimas partiendo desde un nodo arbitrario.
- II. En una red dirigida con arcos de largo positivo, si eliminamos la dirección de cada arco (resultando en una red no dirigida), las distancias de ruta mínima no cambiarán.
- III. Entre todas las rutas mínimas en una red, el algoritmo de Dijkstra siempre encuentra la ruta mínima conteniendo el mínimo número de arcos posible.

- P13. – a) (3 ptos.) Considere una red con un origen s y un destino t . Se desea encontrar k rutas desde s a t de forma que no compartan nodos, salvo los extremos, y tales que la suma de los costos de las k rutas sea mínima. Formule este problema como un problema de flujo a costo mínimo. Indicación: reemplace cada nodo $i \in \mathcal{N} \setminus \{s, t\}$ por dos nodos conectados de forma adecuada.
- b) (3 ptos.) Recuerde que el *Problema de Asignación* se puede formular de la siguiente manera:

$$\max \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} a_{ij} x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{\{j: (i,j) \in \mathcal{A}\}} x_{ij} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{\{i: (i,j) \in \mathcal{A}\}} x_{ij} = 1, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}$$

Formule el dual del problema anterior y encuentre las condiciones de Holgura Complementaria asociadas.

- P14. – 1. Considere una implementación del algoritmo genérico para rutas mínimas, asumiendo sólo arcos de costo no negativo.
- a) (2 ptos.) Considere un nodo j satisfaciendo en algún instante

$$d_j \leq d_i \quad \forall i \in V$$

Muestre que esta relación se mantendrá en lo que resta del algoritmo y que j no volverá a entrar a V . Más aún, muestre que d_j no será modificado.

- b) (1 pto.) Suponga que el algoritmo está estructurado de forma tal que remueve de V un nodo de etiqueta mínima al menos una vez cada k iteraciones, con k algún natural. Muestre que el algoritmo termina en a lo más kN iteraciones.
2. Suponga que son conocidos los costos de las rutas mínimas para ir de un nodo s a todos los nodos de la red, denotados por d_i^s , $\forall i \in \mathcal{N}$, y que existen arcos (pero no ciclos) de costo negativo. Considere el problema de calcular las rutas mínimas desde otro nodo s' al resto de los nodos. Para resolverlo, se propone la siguiente modificación de los costos

$$\overline{a_{ij}} = a_{ij} + d_i^s - d_j^s, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{A}$$

- 1) (1 pto.) Muestre que $\overline{a_{ij}} \geq 0$, $\forall (i, j) \in \mathcal{A}$.
- 2) (1.5 ptos.) Pruebe que al resolver el problema con costos modificados se obtienen exactamente las mismas rutas mínimas que se hubieran obtenido considerando los costos originales.
- 3) (0.5 ptos.) ¿Qué ventajas tiene realizar esta modificación en los costos?

P15.- Considere una instancia del problema de transporte donde existe exceso de demanda. Considere un nodo fuente adicional A tal que $\alpha_A = \sum_j \beta_j - \sum_i \alpha_i$ y costos a_{Aj} .

- Reformule el problema como un problema de transporte equilibrado agregando las variables y restricciones que sean necesarias.
- Si $\forall j \quad a_{Aj} = 0$, muestre que los valores óptimos del problema original y del modificado coinciden. Cómo se relacionan las soluciones óptimas respectivas?
- Si $\forall j \quad a_{Aj} = c$, muestre que los valores óptimos del problema original y del modificado difieren en una constante independiente de la solución óptima. Cómo se relacionan las soluciones óptimas respectivas?
- Si existen j y j' tales que $a_{Aj} \neq a_{Aj'}$, qué puede decir de las soluciones y valores óptimos de cada problema?

P16.- Considere $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathcal{R}$. Se desea particionar A en grupos satisfaciendo:

- Cada grupo debe tener al menos p elementos.
- Los números de cada grupo deben ser consecutivos. Por ejemplo, no se permite que un grupo contenga a_1 y a_3 sin contener a_2 .

Se quiere minimizar la suma de las desviaciones cuadráticas medias de cada grupo. La desviación cuadrática media de un grupo S se define por

$$d(S) = \frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} (a_i - \overline{a_S})^2 \quad \overline{a_S} = \frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} a_i$$

- Formule el problema de encontrar estos grupos como un problema de rutas mínimas.
- Resuelva la siguiente instancia del problema, usando algún método para calcular rutas mínimas: $n = 5, p = 2, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 2, a_5 = -2$.
- Si ahora en lugar de $d(S)$, se minimiza la suma de $f(S)$ con $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{R}_+$, donde $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de las partes de A o conjunto potencia de A , cómo queda la formulación del problema?

P17.- Una empresa de arriendo de autos necesita una cantidad conocida de vehículos $r_1, \dots, r_n$ para los próximos n días. Al final de cada día se debe decidir cuántos vehículos son enviados a la lavandería rápida (1 día, costo f por vehículo), cuántos a la lavandería lenta (2 días, costo $s < f$ por vehículo), y cuántos son guardados sucios. La demanda de vehículos es satisfecha a partir de autos limpios provenientes de cada lavandería y, en caso que falten, es posible encargar autos adicionales a la central incurriendo en un costo p por vehículo. Inicialmente la empresa no tiene autos.

- Formule el problema como uno de Transporte (flujo a costo mínimo). Para ello construya un grafo en que:
 - La demanda del día i se representa mediante demandas en los nodos m_i y la oferta de autos se representa mediante oferta en nodos t_i , donde m_i y t_i representan la mañana y la tarde del día i . ¿cuánto debe ser la demanda en el nodo m_i y cuánto la oferta en el nodo t_i ?
 - Represente las lavanderías como arcos que van de un día al día correspondiente (Recuerde que hay dos tipos de lavanderías). ¿Entre qué nodos van estos arcos?
 - Represente la acumulación de autos sucios como arcos que van de un día al día siguiente. ¿Entre qué nodos van estos arcos?
 - Por último, agregue el nodo C que representa a la central de donde se piden los autos y a donde se devuelven después del último día (Recuerde que es posible pedir autos a la central para cualquier día). ¿Qué arcos salen y entran de éste último nodo?
 - Agregue los costos correspondientes a los arcos.

b) Resuelva para el caso $n = 4$, $r_1 = 8$, $r_2 = 6$, $r_3 = 10$, $r_4 = 7$, $f = 6$, $s = 3$ y $p = 10$.

P18.- 1. A continuación se muestra una iteración del algoritmo de Hitchcock para un problema de transporte:

x_{ij}	1	2	3	4	S_i
1	9	7	12	8	18
	4	14			
2	15	12	12	15	4
			4		
3	8	9	6	12	6
	2		4		
4	14	12	11	12	12
			7	5	
D_j	6	14	15	5	

Responda breve y justificadamente las siguientes preguntas:

- 1) ¿Es una solución factible?
- 2) Muestre que la solución es óptima.
- 3) ¿Es la solución óptima única?
- 4) Proporcione la formulación matemática del problema original y su dual.
- 5) ¿Cuál es la solución óptima del problema dual?
- 6) Suponga que el costo del arco $(4, 3)$ se incrementa de 11 a 13. Determine la nueva solución óptima primal.

2. Para el siguiente *tableau* asociado al problema de transporte de Hitchcock:

x_{ij}	1	2	3	4	α_i
1		10			10
2			11	4	15
3	10	1		10	21
β_j	10	11	11	14	46

con la siguiente matriz de costos asociada

a_{ij}	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	5	4	3	1
3	1	3	3	2

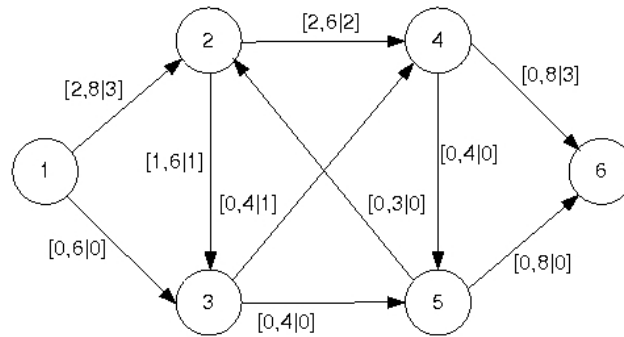
¿Cuál de las siguientes alternativas provee un resumen válido del status del *tableau*?

- (a) La solución óptima del problema de transporte de Hitchcock, donde $C_{min} = 100$.
- (b) Una solución inicial factible obtenida utilizando la regla de mínimo costo.
- (c) Una solución degenerada, en la cuál la celda $(1, 3)$ podría hacerse básica y continuar con el algoritmo.
- (d) Un *tableau* intermedio, donde la celda $(3, 3)$ es la próxima en entrar a la base.
- (e) Ninguna de las anteriores.

Fundamente claramente su respuesta. Respuestas sin fundamento no obtendrán puntaje.

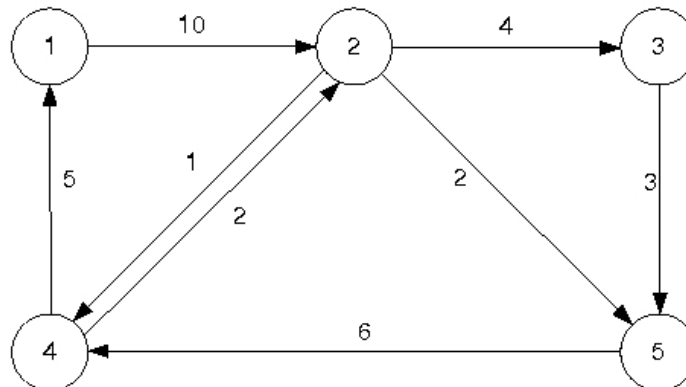
P19.- Diseñe una variante del algoritmo de Ford-Fulkerson en el cual la ruta aumentante sea escogida basado en la mayor capacidad disponible. Desarrolle un ejemplo numérico mostrando que su algoritmo trabaja correcta y eficientemente.

P20.- Considere la red que se muestra en la figura. Cada arco e está marcado con una tripla de la forma $[l_e, u_e | f_e]$: l_e y u_e representan las capacidades mínima y máxima del arco, respectivamente y f_e el valor de un flujo factible.

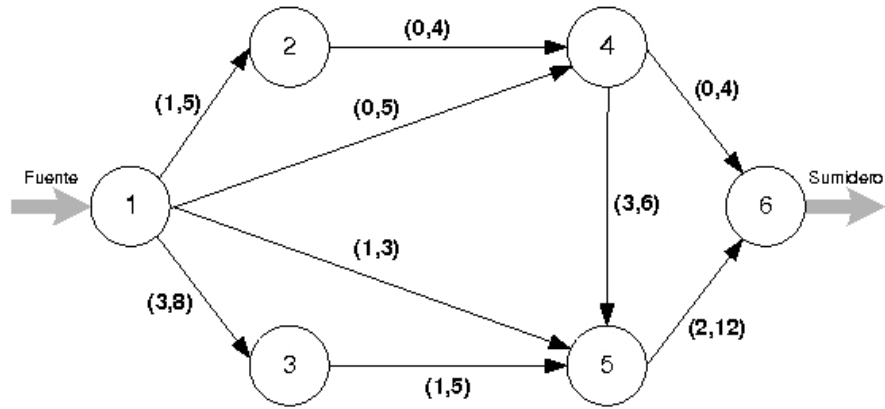


- A partir del flujo inicial indicado, aplique una iteración del algoritmo de Ford-Fulkerson para encontrar un flujo máximo entre los nodos 1 y 6 de la red.
- El flujo encontrado en el punto anterior ¿es óptimo? Justifique su respuesta.

P21.- Haga las tres primeras iteraciones (es decir, $k = 1, 2, 3$) del algoritmo de Floyd-Warshall para el problema de rutas mínimas para múltiples orígenes y destinos en la red de la figura. Liste cuatro tríos (i, k, j) que violen las condiciones de optimalidad de rutas mínimas para múltiples orígenes y destinos, al final de estas tres iteraciones.



- (2 puntos) Suponga una red con una fuente s y un sumidero t , donde algunos arcos tienen capacidad infinita, pero donde todas las rutas desde la fuente s al sumidero t tienen capacidades finitas. Sea c_{ij} la cota superior del flujo en el arco (i, j) . Si denotamos A_0 al conjunto de arcos con capacidades finitas, muestre que es posible reemplazar la capacidad de cada arco con capacidad infinita por una capacidad finita $M \geq \sum_{(i,j) \in A_0} c_{ij}$, sin afectar el valor del máximo flujo entre s y t .
- (4 puntos) Realice una iteración del algoritmo Ford-Fulkerson sobre la red de la figura (donde se indican las cotas inferiores y superiores de flujos por arco), partiendo de un vector de flujo factible determinado por inspección. Manifiéstese respecto de la optimalidad de su resultado.



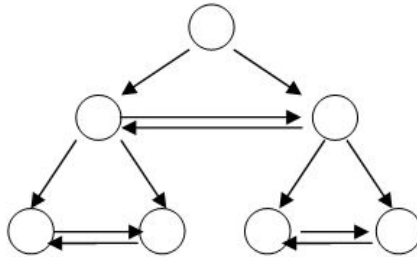
P23. – Considere el siguiente problema de la mochila: Se tienen N tipos de objetos $n = 1, \dots, N$. Cada objeto de tipo n tiene un valor v_n y ocupa una capacidad c_n . Se cuenta con q_n objetos de tipo n ($q_n \geq 1$) para cada n .

El problema consiste en, entre los objetos disponibles, determinar el conjunto que quepa en una mochila de capacidad Q y maximice el valor total.

- (2 puntos) Defina un problema dual para el problema planteado.
- Considere la instancia particular definida por $N = 3$, $v = [10, 4, 3]$, $c = [6, 3, 2]$, $q = [2, 4, 4]$ y $Q = 19$.
 - (2 puntos) Calcule la cota dual producida por el problema dual definido en el punto 23a para esta instancia.
 - (2 puntos) Calcule una cota primal para el valor óptimo, a partir de una solución factible. ¿Se puede afirmar que esta solución es óptima? Justifique.

P24. – En el problema de buscar la ruta mínima entre 2 nodos s y t , pruebe que si la ruta óptima R posee un arco repetido entonces puede modificarla obteniendo una ruta óptima R' que no repite arcos. Verifique que R y R' tienen el mismo costo.

P25. – Considere la siguiente instancia de rutas mínimas



donde $a_{ij} < a_{ik} + a_{kj} \quad \forall (i,j), (i,k), (k,j) \text{ en } A$.

- Muestre que existe solución óptima de costo finito.
- Muestre que dicha solución corresponde a un árbol binario.

P26. – Suponga que usted está aplicando el algoritmo de Dijkstra. Si en una iteración cualquiera del algoritmo se elige el nodo u como el nodo que sale de la lista de candidatos V , muestre que para todo el resto de nodos v del conjunto V , se cumple lo siguiente:

$$d_u \leq d_v \leq d_u + C$$

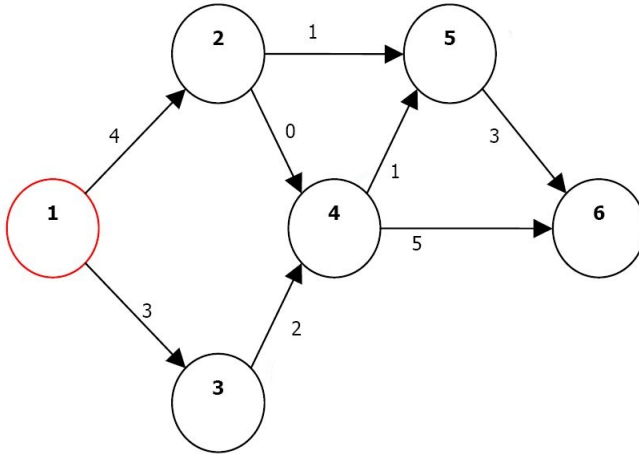
donde C representa el costo del arco más "largo" de la red, es decir, $C = \max_{(i,j) \in A} a_{ij}$.

P27.- Muestre que las distancias de ruta mínima (desde nodo 1) $d_1, \dots, d_n$, deben satisfacer las siguientes ecuaciones (ecuaciones de Bellman):

$$\begin{aligned} d_1 &= 0 \\ d_j &= \min_{(i,j) \in A} \{d_i + a_{ij}\} \quad j \neq 1 \end{aligned}$$

Muestre además con un ejemplo, que en caso que la red contenga algún ciclo de largo 0, podrá existir algún vector $(d_1, \dots, d_n)$ que satisfaciendo las ecuaciones de Bellman, no representa las distancias de rutas mínimas.

P28.- Para la red de la figura:



- Encuentre las rutas mínimas del nodo 1 al resto de los nodos usando el **algoritmo de Dijkstra**.
- Encuentre las rutas mínimas del nodo 1 al resto de los nodos usando el **algoritmo de Bellman-Ford**.

P29.- Considere el siguiente problema de transporte:

c_{ij}		A	B	S_i
1		5	3	7
2		5	6	8
3		2	2	5
D_j		12	13	

- Encuentre el óptimo del problema de transporte. ¿Es único? En caso de no serlo, encuentre los otros óptimos y verifique que tienen igual costo total. Expresé gráficamente la(s) solución(es) en la red.
- Suponga ahora que se permite transportar productos desde el oferente 1 al 3 y desde 2 a 3 con costo nulo. Encuentre la nueva distribución óptima de flujos, y en caso de existir otra, encuéntrala. Verifique además que el costo total en este caso es menor que el obtenido en la parte a) y exprese gráficamente en la red la(s) solución(es).

P30.- Considere el siguiente tableau de distancias, correspondiente a una iteración del algoritmo de Floyd-Warshall para una red de tres nodos A,B,C:

	A	B	C
A	0	4	1
B	1	0	2
C	2	1	0

¿Representa este tableau la solución óptima de rutas mínimas de todos a todos? Justifique su respuesta.

P31.- Para una red de tres nodos, encuentre el rango de valores para el parámetro θ de forma tal que la siguiente tabla represente los valores de la distancia mínima entre cada par de nodos de la red.

	A	B	C
A	0	5	4
B	θ	0	3
C	4	2	0

P32.- Suponga, en una red $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$, que los únicos arcos que tienen costo negativo son los que salen del nodo origen 1. Muestre como adaptar el algoritmo de Dijkstra de manera que resuelva el problema de rutas mínimas del nodo 1 a todos los nodos de la red en a lo más $N - 1$ iteraciones, donde $N = |\mathcal{N}|$ es el número de nodos.

Indicación: Modifique la inicialización del algoritmo de una manera adecuada.

P33.- Considere el problema de máximo flujo (entre nodos s y t) formulado como un problema de flujo a costo mínimo. Determine el dual de este problema y escriba las condiciones de holgura complementaria.

P34.- En el contexto del problema de flujo a costo mínimo, demuestre que la solución óptima, tanto del primal como del dual, no cambian al sumar una constante δ a cada variable dual p_i , $i \in \mathcal{N}$, es decir, reemplaza p_i por $p_i + \delta$.

P35.- Para la siguiente red de transporte, ejecute una iteración del algoritmo de Hitchcock, en donde la inicialización **debe** ser realizada con la regla de la **esquina Nor-Oeste**. Al final de dicha iteración, recupere las rutas factibles (i.e. el resultado de la iteración).

