INGENIERÍA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs: Daniel Espinoza
Andrés Weintraub
Auxs: Fernanda Bravo
Gonzalo Romero

# Auxiliar 3

30 de Marzo de 2008

## Pregunta 1

El recién electo presidente de Estados Juntos, Baraki Obamu, ha decidido reestructurar la localización de los colegios en el estado de Mazachuset.
Sea $N$ el conjunto de ciudades que hay que considerar; el subconjunto $C$ de $N$ contiene las ciudades donde puede haber un colegio (en una ciudad puede haber máximo un colegio).
$C_1$ es el subconjunto de $C$ donde ya existe un colegio.
En la ciudad $i$ hay $E_i$ estudiantes que tienen que ir a un colegio. Ningún estudiante puede viajar más de $L$ kms. $D_{ij}$ es la distancia en kms entre las ciudades $i$ y $j$; $i, j \in N$ (se puede asumir $D_{ii} = 0$).
Los colegios existentes (colegio tipo 1) tienen una capacidad para $E$ estudiantes. Hay un nuevo tipo de colegio (colegio tipo 2) que tiene capacidad para $EM$ estudiantes ($E < EM$).
El costo para construir un colegio del tipo $t$ es de $C_t$ UM (unidades monetarias), $t = 1, 2$. Se pueden construir colegios tipo 1 o 2. El costo para cerrar un colegio existente es de $CE$ UM.
Para la reestructuración de los colegios hay un presupuesto de $PPTO$ UM.
Plantee un PPL que determine dónde cerrar y dónde construir colegios y que además asigne a los estudiantes a un colegio. Suponga como función objetivo la minimización del costo total de la reestructuración.
¿Cómo cambia el modelo si en vez de minimizar el costo total se quiere minimizar la distancia total que tienen que viajar todos los alumnos?

## Pregunta 2

Usted desea abrir una nueva cadena de supermercados en su ciudad de modo de maximizar beneficios para los próximos T años. Para ello tiene un conjunto de K posibles locaciones cada una con costo de CIk, sobre las cuales podrá instalar un supermercado en el periodo 0. Dado el layout de sus potenciales supermercados, usted sabe que podrá tener como máximo CAPnk unidades de producto n por periodo dentro del supermercado k. Adicionalmente usted puede decidir ampliar su supermercado en un piso superior después de un año de construido, lo que aumentaría su capacidad en AkPara el conjunto de productos no perecibles NP(n), usted construirá una bodega por supermercado, en donde puede almacenar este tipo de productos. Todo producto no perecible debe pasar por bodega. Cualquier producto que llegue a las góndolas será desechado si no es vendido en el plazo de un año. La ciudad está dividida en S zonas, cada una de las cuales tienen un tipo determinado de cliente, de tal forma que un cliente solo comprará en un supermercado de su zona. La demanda por cliente es Dsn por producto n. Existe un total de C supermercados de la competencia, cada uno de los cuales satisface una demanda de dsnc. Entre todos estos no alcanzan a cubrir toda la demanda, por lo que usted deberá satisfacer el déficit que existe. Considerando que el costo por producto es de CVn, el costo de mantener una unidad de producto en el supermercado es de CMnk, por almacenarlo es de CBnk y por transportar unidades del producto n desde la bodega a las góndolas es de CGnk y sabiendo que puede vender cada producto a Gn, formule un problema de programación lineal que le permita maximizar sus utilidades.

## Pregunta 3

Luego de realizado el primer ejercicio del curso, nuestro amigo, El Lobo, se dio cuenta de que su nuevo par de Avivas no fue suficiente para hacer el recorrido de las salas, contestando preguntas, de la manera más eficiente.
Como el control estaba cerca, El Lobo decidió pedirle ayuda a sus alumnos de modo de descubrir la manera de recorrer las salas para contestar todas las preguntas en el menor tiempo posible.
El Lobo sabe el tiempo que demora en trasladarse entre cada par de salas, de las $S$ salas donde se tomará el control. Este tiempo está dado por $t_{sm}$ (tiempo en trasladarse de la sala $s$ a la $m$).
Adicionalmente sabe que en cada sala le realizarán un número de preguntas $n_s$ más un incremento proporcional al tiempo en que haya demorado en ingresar a la sala. Así, por cada minuto desde la última vez que ingresa a la sala, el número de preguntas aumenta en un $a_s$ %. Además se ha estimado que una pregunta es contestada en aproximadamente 1 minuto. (No se preocupe si el numero de preguntas no es un número natural, si le es más cómodo piense por ejemplo, que si el número de preguntas es igual 10,326 es porque se hicieron 10 preguntas de duración normal y una muy corta).
El número de preguntas no se ve afectado por cuánto tiempo El Lobo permanece en la sala, pero cada vez que sale de la sala, el número de preguntas vuelve a ser $n_s$ y a sufrir el mismo incremento.
Para realizar esta tarea El Lobo decidió recorrer las salas un número $V$ de veces cada una y para ser equitativo decidió visitar todas las salas el mismo número de veces por vuelta, esto es, en la vuelta 1 visita todas las salas, luego en la vuelta 2 todas las salas y así...
Suponga que para este propósito elige una sala de origen, la cual es la misma en cada vuelta, y que las demás salas son elegidas en el orden que más le convenga en cada vuelta.
Además, El Lobo esta cansado y desea terminar con su labor y tener un poco de tiempo libre, para esto deberá finalizar todas las vueltas antes del termino del control, el cual dura $T$ minutos, y luego podrá disfrutar de su tiempo libre.
Ayude al Lobo en su problema, viendo cómo debe moverse en el tiempo, para lograr su objetivo. Hágalo realizando un Modelo de Programación Lineal.

INGENIERÍA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs: Daniel Espinoza
Andrés Weintraub
Auxs: Fernanda Bravo
Gonzalo Romero

# Auxiliar 3

30 de Marzo de 2008

## Pregunta 1

- Variables de decisión

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si mantengo el colegio } i \text{ abierto } (i \in C_1). \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Y_{it} = \begin{cases} 1 & \text{Si construyo el colegio de tipo } t \text{ en } i \ (i \in C). \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si asigno alumnos de } i \text{ al colegio ubicado en } j \ (i \in N, j \in C). \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$W_{ij}$= Número de alumnos de $i$ que asigno a colegio ubicado en $j$ ($i \in N, j \in C$).

- Restriciones

1. Naturaleza de las variables

$$X_i, Y_{it}, Z_{ij} \in \{0,1\}$$
$$W_{ij} \in N$$

2. Asigno alumnos si la distancia lo permite

$$Z_{ij} - M(1 - Z_{ij}) \leq L - D_{ij} + 1 \quad \forall i,j$$

M grande, por ejemplo $\sum_{ij} D_{ij}$

3. Relación entre variables de asignación

$$W_{ij} \leq M Z_{ij} \quad \forall i,j$$

M grande, por ejemplo $E_i$

4. Todos los alumnos deben ser asignados

$$\sum_j W_{ij} = E_i$$

5. Para asignar colegio, debe existir

$$Z_{ij} \leq Y_{j1} + Y_{j2} + X_j \quad \forall j \in C_1$$
$$Z_{ij} \leq Y_{j1} + Y_{j2} \quad \forall j \in C/C_1$$

6. Capacidad de los colegios

$$\sum_i W_{ij} \leq EY_{j1} + EMY_{j2} + EX_j \quad \forall j \in C_1$$

$$\sum_i W_{ij} \leq EY_{j1} + EMY_{j2} \quad \forall j \in C/C_1$$

7. Solo un colegio por ciudad

$$Y_{j1} + Y_{j2} + X_j \leq 1 \quad \forall j \in C_1$$

$$Y_{j1} + Y_{j2} \leq 1 \quad \forall j \in C/C_1$$

8. Respetar presupuesto

$$\sum_t \sum_{j \in C} Y_{jt} C_j + \sum_{j \in C_1} (1 - X_j) CE \leq PPTO$$

- Función objetivo

$$Min \quad Z = \sum_t \sum_{j \in C} Y_{j1} C_j + \sum_{j \in C_1} (1 - X_j) CE$$

o bien

$$Min \quad Z = \sum_{i \in N} \sum_{j \in C} W_{ij} D_{ij}$$

## Pregunta 2

- Variables de Decisión.

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{Si se construye supermercado en localización } k \text{ en } t = 0. \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Y_k^t = \begin{cases} 1 & \text{Si se agranda capacidad del supermercado en localización } k \text{ en } t. \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$P_{nk}^t$= Cantidad de producto $n$ que llega al supermercado $k$ en $t$.

$PG_{nk}^t$= Cantidad de producto $n \in NP$ enviado a góndolas en supermercado $k$ en $t$.

$I_{nk}^t$= Cantidad de producto $n \in NP$ almacenado en bodega en supermercado $k$ en $t$ (al final).

- Restricciones.

1. Construir un supermercado máximos.

$$\sum_{k \in S} X_k \leq Card(s) \quad \forall s \in S$$

$$\sum_{k} X_k \leq K$$

2. Ampliar sólo si se construye el supermercado

$$\sum_{p=1}^{t} Y_k^p \leq X_k \quad \forall k \in K$$

3. Capacidad en góndolas

$$P_{nk}^t \leq \left( A_k \sum_{p=1}^{t} Y_k^p + 1 \right) CAP_{nk} \quad \forall t, k, \quad n \in P$$

$$PG_{nk}^t \leq \left( A_k \sum_{p=1}^{t} Y_k^p + 1 \right) CAP_{nk} \quad \forall t, k, \quad n \in NP$$

4. Conservación de flujo en bodega

$$I_{nk}^t = I_{nk}^{t-1} + P_{nk}^t - PG_{nk}^t \quad \forall t, k, \quad n \in NP$$

5. Envío productos al supermercado ssi se construyó

$$P_{nk}^t \leq M X_k \quad \forall t, k, n$$

6. Satisfacer demanda.

$$\sum_{k \in s} P_{nk}^t = D_{sn} - \sum_{c \in C} \delta_{snc} \quad \forall t, s, \quad n \in P$$

$$\sum_{k \in s} PG_{nk}^t = D_{sn} - \sum_{c \in C} \delta_{snc} \quad \forall t, s, \quad n \in NP$$

7. Naturalexa de las variables

$$X_k, Y_k^t \in 0, 1 \quad \forall t, k$$

$$P_{nk}^t, PG^t nk, I_{nk}^t \in N \quad \forall t, k, n$$

- Función Objetivo

$$Max$$

$$\sum_{n,s,t} \left( D_{ns} - \sum_{c \in C} \delta_{snc} \right) G_n - \sum_{k,t} \left( CI_k X_k + CA_k Y_k^t \right)$$

$$- \sum_{n,k,t} CV_n P_{nk}^t - \sum_{n \in P, k, t} CM_{nk} P_{nk}^t - \sum_{n \in NP, k, t} (CM_{nk} + CG_{nk}) PG_{nk}^t + CB_{nk} I_{nk}^t$$

## Pregunta 3

- Variables de Decisión

$$X_{vsm} = \begin{cases} 1 & \text{Si la sala } m \text{ es visitada despues de la } s \text{ en la vuelta } v \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$T_{vs}$ = Instante en que se entra a la sala s en la vuelta v

$\forall v \in V = \{1 ... |V|\}, \forall s, m \in S = \{1 ... |S|\}$

- Restricciones

  Se ha considerado las sala 0 y $|S|+1$ como salas ficticias de origen y termino de cada vuelta. Sin embargo, se señalan como quedan las restricciones considerando sólo una sala ficticia 0, que es como se aclaró en el control.

  1. Solo una sala precede a la sala $m$
  $$\sum_{s} X_{vsm} = 1 \quad \forall m \in S = \{1...|S|+1\} \forall v \in V = \{1...|V|\}$$
  2. Solo una sala sucede a la sala $s$
  $$\sum_{m} X_{vsm} = 1 \quad \forall s \in S = \{0...|S|\} \forall v \in V = \{1...|V|\}$$

  ***Obs:*** Si sólo se dieron la sala 0 como sala ficticia, las restricciones 1 y 2 quedan como sigue:

  1.
  $$\sum_{s \geq 0} X_{vsm} = 1 \quad \forall m \in S = \{0...|S|\} \forall v \in V = \{1...|V|\}$$
  2.
  $$\sum_{m \geq 0} X_{vsm} = 1 \quad \forall s \in S = \{0...|S|\} \forall v \in V = \{1...|V|\}$$

  3. Respetar tiempos de ingreso a cada sala
  $$T_{vm} \geq T_{vs} + t_{sm} + n_s(1 + a_s(T_{vs} - T_{v-1s})) - (1 - X_{vsm})M$$
  $$\forall s, m \in S = \{1...|S|+1\} \forall v \in V = \{1...|V|\}$$

  Cambio entre una vuelta y otra
  $$T_{v0} \geq T_{v-1|S|+1}$$
  $$\forall v \in V = \{1...|V|\}$$

  En caso de 0 sala ficticia de origen:
  $$T_{vm} \geq T_{vs} + t_{sm} + n_s(1 + a_s(T_{vs} - T_{v-1s})) - (1 - X_{vsm})M$$
  $$\forall s, m \in S = \{0...|S|\} \forall v \in V = \{1...|V|\}$$

  Cambio entre una vuelta y otra
  $$T_{vs} \geq T_{v-10}$$
  $$\forall s \in S = \{1...|S|\}, \forall v \in V = \{1...|V|\}$$

  4. Respetar duración del control
  $$T_{|V||S|+1} \leq T$$

  en caso de 0 sala ficticia:
  $$T_{|V|0} \leq T$$

  5. Naturaleza de las variables
  $$X_{vsm} \in \{0,1\} \quad \forall s, m \in S = \{0...|S|+1\}, \forall v \in V = \{1...|V|\}$$
  $$T_{vs} \in \mathfrak{R}^{+} \quad \forall s, m \in S = \{0...|S|+1\}, \forall v \in V = \{1...|V|\}$$

  ***obs:*** sacar $|S|+1$ en caso de sala 0 como sala ficticia de origen.

- Función Objetivo

$$\min T_{|V||S|+1}$$

o bien con 0 como sala ficticia de origen:

$$\min T_{|V|0}$$

Dudas y/o comentarios a
Ma. Fernanda Bravo
mariabra@ing.uchile.cl