Tarea 2

Profesor: Alexandre Janiak
Auxiliar: Sergio Salgado Ibáñez

La tarea se entrega el día jueves 23 de abril, a más tardar, a las 23:00 hrs. Debe enviar al correo ajaniak@dii.uchile.cl un PDF con las respuestas más los archivos *.m

Ejercicio 1: simulaciones de Monte Carlo

Considere la situación siguiente: se tira un dado 5 veces seguidas y se cuenta el número de veces que se obtiene un 6.

1. Explique porque la variable aleatoria X, que da el número de 6 sacados, sigue una distribución binomial. ¿Cuáles son los parámetros de esta distribución? ¿Cuál es la probabilidad que X sea igual a 2?

2. Ahora, en lugar de calcular la probabilidad que X sea igual a 2 basándonos en las propiedades de la binomial, vamos a estimar esa probabilidad usando simulaciones de Monte Carlo. En particular, vamos a repetir un número alto de veces el ejercicio de "tirar un dado 5 veces y contar el número de veces que sale un 6". En Matlab, simule realizaciones de X unas 10000 veces. ¿Cuál es el porcentaje de esas realizaciones tal que $X = 2$? Compare su resultado con su respuesta a la pregunta anterior.

3. Repita las dos primeras preguntas con $X = 4$.

4. Supongamos ahora que el dado no se tira 5 veces seguidas, sino 100 veces. Basándose en simulaciones de Monte Carlo, estime las probabilidades que $2 \leq X \leq 60$ y $X > 3$.

5. Seguimos suponiendo que el dado no se tira 5 veces seguidas, sino 100 veces. Basándose en simulaciones de Monte Carlo, estime la esperanza de X. Construya un intervalo de confianza del 95% para su estimación.

Ejercicio 2: cadenas de Markov

Considere un proceso estocástico X_t que sigue una cadena de Markov homogénea con tres estados cuya matriz de transición P es

$$P = \begin{bmatrix} .2 & .5 & .3 \\ .3 & .4 & .3 \\ .4 & .2 & .4 \end{bmatrix}$$

1. Escriba en Matlab un código permitiendo simular este proceso. Explique con palabras como simula el programa esta cadena de Markov.

2. Simule esta cadena un número alto de veces (e.g. 10000 veces). Para cada simulación, considere un número alto de periodos (e.g. 10000 periodos). Encuentre la distribución de largo plazo de la variable X_t, basándose en sus simulaciones, y precise cuanto tiempo necesitó para correr su programa (comando tic toc en Matlab). Puede utilizar el vector π siguiente de probabilidades para determinar las condiciones iniciales:

$$\pi = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

3. Un método alternativo para aproximar la distribución de largo plazo de esta cadena de Markov es ir multiplicando la matriz P por si misma un número alto de veces y parar una vez que haya convergido la distribución. Escriba un programa en Matlab que realice esta operación ¿Cuánto se demoró en correr el programa?

4. Finalmente, se puede calcular la distribución de largo plazo basándose en los valores propios de la matriz P'. Escriba un programa en Matlab que considere este método. ¿Cuánto se demoró en correr el programa?

5. Compare los tres métodos que ha usado para aproximar la distribución de largo plazo. Comente.

6. Reproduzca el análisis con la matriz de transición $\tilde{P}$ siguiente y comente cuando le parezca oportuno:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .3 & .5 & .2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3: ***Value function iteration***

Considere un monopolista que enfrenta una curva de demanda $D(p)$ y tiene una función de coste $C(q,Q)$, donde q corresponde al output actual y Q depende de las cantidades producidas pasadas de la forma siguiente:

$$Q_{t+1} = \lambda q_t + (1-\lambda)Q_t$$

1. Formule el problema dinámico y escriba la ecuación de Bellman correspondiente. ¿Cuáles son las variables de contol y de estado? Para contestar a esta pregunta, supondremos que el factor de descuento para el monopolista es $\beta \in (0,1)$, tal que $\beta = \frac{1}{1+r}$ donde r es la tasa de interés real.

2. Iterando la función de valor, aproxime la *value function* y la *policy function*, considerando varios valores de $0 < \lambda < 1$, una función de demanda lineal y una función de costo de la siguiente forma:

$$C(c, Q) = a + (b - c(Q + 1)^{-0.2})q$$

   donde a, b y c son parámetros positivos. Para contestar a esta pregunta, cree una grilla para Q y interpole sobre esta grilla si es necesario.

3. Utilizando su aproximación de la *policy function*, simule trayectorias para Q y q considerando varios valores para λ y Q_0. Para contestar a esta pregunta, utilice interpolaciones de su aproximación si es necesario. ¿Convergen las variables hacia un estado estacionario? ¿Cómo influye λ sobre la velocidad de convergencia? Explique.