INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

2. Matemática Financiera

(Valor Presente y Tasas de Interés)

IN56A

Otoño 2009 | Gonzalo Maturana F.

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

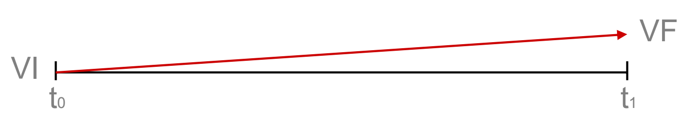
Valor del dinero en el tiempo

Principio fundamental en finanzas:

“ 1 $ hoy vale más que 1 $ mañana”

Esto se debe a que el dinero hoy puede invertirse y empezar a generar intereses.

Un monto inicial VI se transforma en VF a través de una tasa de interés r.



$$VF = VI \times (1 + r \times t) = VI + \text{intereses}$$

$$\text{Intereses} = VI \times r \times t \qquad ; \qquad t = t_1 - t_0$$

Intereses

La tasa de interés no es un concepto único. Depende de:

- Convenciones de medición del tiempo
  - o Base 360, base 365, días hábiles, etc.

- Composición
  - o Lineal (o simple)
  - o Compuesta (anual, semestral, etc.)
  - o Continua

Interés Simple

Generalmente se utiliza para inversiones con plazos menores a 1 año. Los intereses producidos en el plazo que dura la inversión provienen solamente del capital inicial.

$$\boxed{VF = VI \cdot (1 + r \cdot t)}$$

Ej.:

Si la tasa de interés de un depósito es 0.6% mensual y se invierten $10 millones a 3 meses, entonces:

VF = M$10*(1 + 0.6%*3) = $10.18 millones ; intereses = $180,000

Al término 0.6%*3 = 1.8% se le denomina interés efectivo.

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Continuando con el ejemplo…

¿Qué sucede si reinvertimos el depósito anterior por 3 meses más a la misma tasa de interés de 0.6%?

VF = M$10.18*(1 + 0.6%*3) = M$10*(1 + 0.6%*3)^2 = $10,363,240

Intereses = 363,240.

Si hubiéramos tomado en un principio un depósito a 6 meses:

VF = M$10*(1 + 0.6%*6) = $10,360,000

La diferencia hubiese sido de $3,240.

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Interés Compuesto

Generalmente se utiliza para inversiones con plazos superiores a 1 año, o cuando los intereses y el capital se re-invierten a la tasa original.

$$\boxed{VF = VI \cdot (1 + r)^n}$$

Más generalmente …

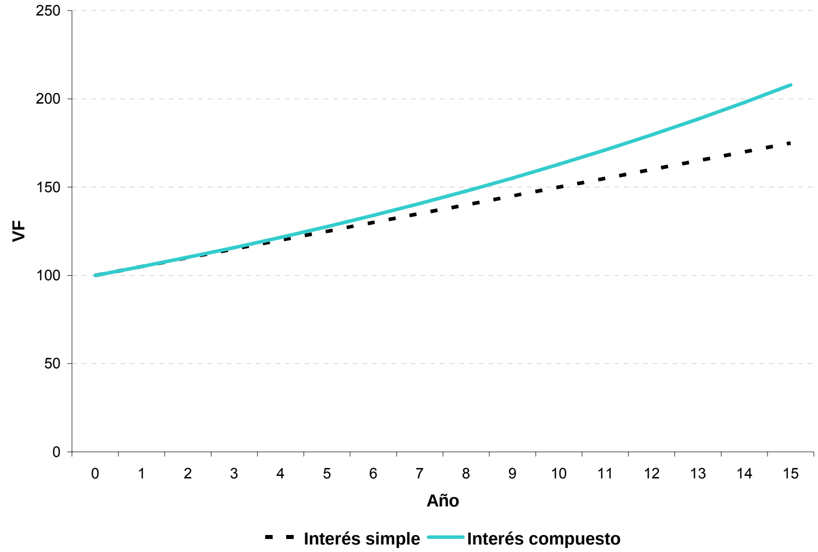
Si la frecuencia de composición de intereses en 1 año es f y si la tasa de interés (anual) que se aplica en un intervalo de tiempo es r, entonces podemos definir que al invertir VI, generamos:

$$\boxed{VF = VI \cdot \left(1+\frac{r}{f}\right)^{t \cdot f}}$$

- t es el tiempo expresado en años
- Si f = 2, composición es semestral
- Si f = 1, composición es anual
- Si f = 360, composición es diaria

Interés simple vs. compuesto

Si se invierte un VI = 100 a una tasa r = 5%, el VF difiere si el interés aplicado es simple o compuesto.



Capitalización continua

Con pago de intereses compuestos continuamente, el valor presente de un flujo en el tiempo t es igual a:

$$\boxed{VP = C_t \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n\cdot t}} = C_t \cdot e^{-r\cdot t}}$$

Ej.:

Si invertimos a una tasa de 10% compuesta continuamente, la tasa anual efectiva es

$$e^{0.10} - 1 = 10.52\%$$

Factor de riqueza (1)

Para evitar confusiones al momento de manejar intereses, es útil trabajar con el concepto de factor de riqueza.

Definición:

Se define al factor de riqueza W como la riqueza final en un intervalo cuando se invierte $1 al inicio de dicho intervalo.

Propiedad multiplicativa

Si se tienen factores de riqueza de intervalos de intervalos contiguos $W(t_1,t_2)$ y $W(t_2,t_3)$, entonces:

$$W(t_1,t_3) = W(t_1,t_2)*W(t_2,t_3)$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Factor de riqueza (2)

Se puede por lo tanto trabajar en el espacio que más nos acomode, sin perder de vista el factor de riqueza que queremos representar.

A partir del factor $W(t_1,t_2)$ podemos despejar la tasa r para cualquier convención:

Simple o lineal → $$[W(t_1,t_2)-1]\cdot\frac{1}{(t_2-t_1)}$$

Compuesta (semestral) → $$2\cdot\left[W(t_1,t_2)^{\frac{1}{2\cdot(t_2-t_1)}}-1\right]$$

Compuesta continuamente → $$\ln[W(t_1,t_2)]\cdot\frac{1}{(t_2-t_1)}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Valorización de activos

Para valorizar activos financieros utilizamos el concepto de Valor Presente (VP). Este concepto considera que existe un costo de oportunidad asociado a las inversiones, es decir, que es mejor tener \$1 hoy que \$1 mañana.

Si C_1 es el cobro esperado en t_1, entonces su valor presente es:

$$\boxed{VP = \text{factor de descuento}\cdot C_1 = \frac{1}{W(t_0,t_1)}\cdot C_1 = \frac{C_1}{1+r}}$$

r es la recompensa que se exige por la aceptación del cobro aplazado.

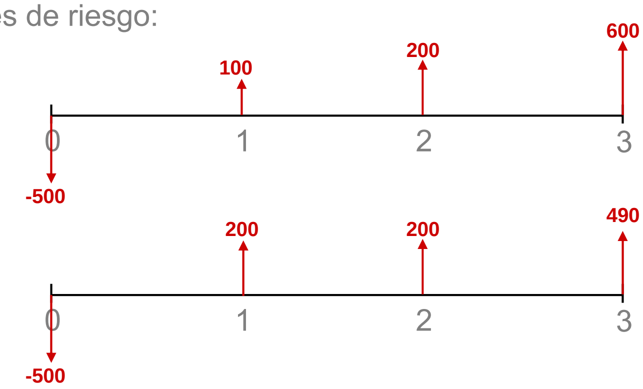
Valor Presente Neto (1)

El Valor Presente Neto permite comparar el distintos activos o proyectos. Resume el valor de distintos flujos dispersos a través del tiempo en un solo número.

Ej.: Supongamos que podemos invertir en las siguientes alternativas de inversión libres de riesgo:

Alt. 1

Alt. 2



¿Cuál alternativa deberíamos elegir?

Valor Presente Neto (2)

Si definimos el Valor Presente Neto igual a:

$$\boxed{VPN = \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}}$$

Considerando una tasa libre de riesgo de 7.25%, entonces:

VPN(Alt. 1) = 253.48

VPN(Alt. 2) = 257.55

Por lo que deberíamos elegir la alternativa nº2.

Atajos (1)

Perpetuidades

Cuando se quiere valorar en el presente un flujo fijo conocido a ser recibido para siempre.

$$VP = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \ldots \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{VP = \frac{C}{r}}$$

Ej:

Una fundación se compromete a donar $1,000,000 al año de manera indefinida para becas estudiantiles. Supongamos que la tasa de interés es de 10%.

El valor presente de esta perpetuidad es igual a

$$\frac{1{,}000{,}000}{0.1} = \$10{,}000{,}000$$

Atajos (2)

Perpetuidades crecientes

Si el flujo (perpetuo) anterior ahora crece anualmente a una tasa g, entonces:

$$VP = \frac{C_1}{(1+r)} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} + \ldots$$

$$VP = \frac{C_1}{(1+r)} + \frac{C_1(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{C_1(1+g)^2}{(1+r)^3} + \ldots \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{VP = \frac{C_1}{r-g}}$$

Ej.:

Supongamos que la fundación del ejemplo anterior se propone aumentar su aporte en 3% al año (para compensar la inflación esperada). Su aporte equivaldría a pagar hoy un total de

$$\frac{1{,}000{,}000}{0.1-0.03} = \$14{,}285{,}714$$

Atajos (3)

Anualidades

Una anualidad es un activo que produce una suma fija al año por un número determinado de años

$$VP = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C}{(1+r)^T}$$

$$VP = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+r)^t} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{VP = C\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^T}\right]}$$

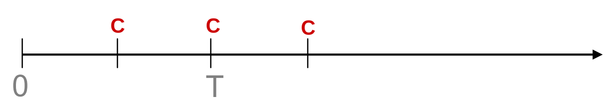
Ej.:

Se tiene un crédito hipotecario a 20 años. El pago anual es de M$4.8 y la tasa de interés es 13%.

$$VP = M\$4.8\left[\frac{1}{0.13} - \frac{1}{0.13(1+0.13)^{20}}\right] = \$33{,}718{,}808$$

Atajos (4)

Una anualidad puede deducirse a partir de la diferencia entre 2 perpetuidades:



Perpetuidad (1er pago en año 1) ⟶ $\frac{C}{r}$

Perpetuidad (1er pago en T + 1) ⟶ $\left[\frac{C}{r(1+r)^T}\right]$

Resta: anualidad hasta año T ⟶ $C\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^T}\right]$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Atajos (5)

Anualidad creciente

Si la cuota crece a una tasa g, entonces:

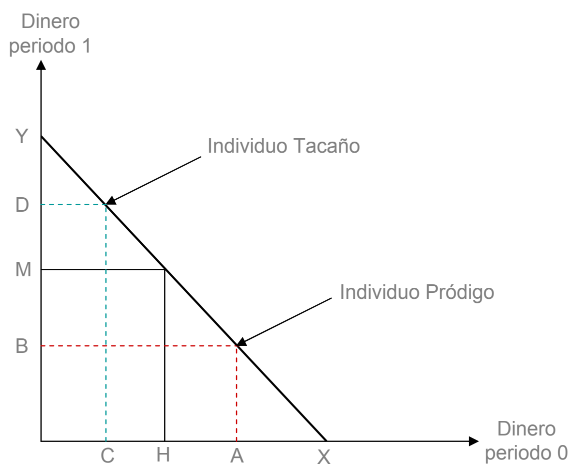
$$\boxed{VP = \frac{C_1}{r-g}\left[1 - \frac{(1+g)^T}{(1+r)^T}\right]}$$

Esta fórmula se puede deducir de la misma forma que la anualidad sin crecimiento.

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

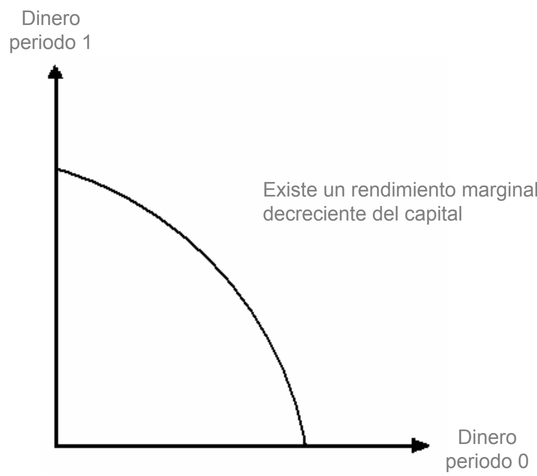
Fundamentos del VPN (1)

La línea de la tasa de interés muestra los flujos a los que un individuo puede acceder a través del préstamo y el endeudamiento. Endeudándose contra el flujo M, el individuo podría consumir hoy un extra equivalente a HX. Por otro lado, prestando H, podría obtener un extra igual a MY.



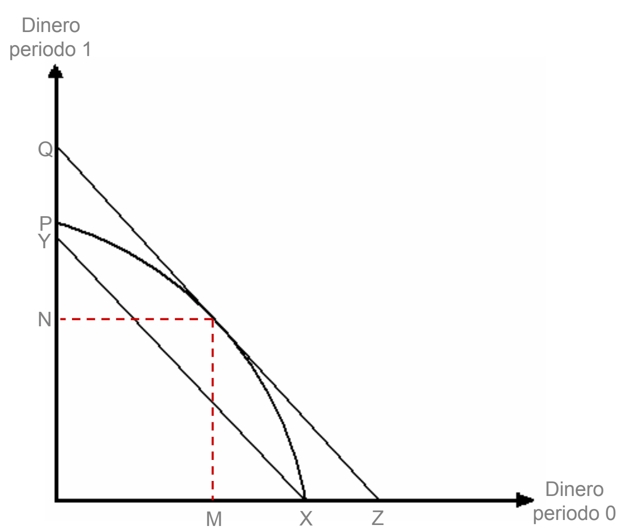
Fundamentos del VPN (2)

Los individuos no sólo pueden invertir en el mercado de capitales. También pueden invertir en activos reales. En el gráfico, vemos la frontera de oportunidades de inversión.



Fundamentos del VPN (3)

Invirtiendo MX en activos reales, el individuo, sin importar si es pródigo o tacaño podrá maximizar su consumo, eligiendo un punto sobre la recta QZ.



Fundamentos del VPN (4)

De las slides anteriores podemos deducir que el criterio de maximizar el VPN de la inversión es equivalente a invertir hasta el punto en que la rentabilidad marginal de la inversión iguale a la tasa de interés del mercado de capitales.

Ahora…

¿Qué sucede si la tasa de endeudamiento es distinta que la tasa para prestar? ¿Y si el mercado no es perfectamente competitivo?

Resultado Fundamental

Independientemente de sus preferencias, distintos individuos pueden delegar la administración de una empresa a un gerente. Lo único que este gerente tiene que hacer para satisfacer a todos es maximizar el VPN (esto es conocido como el Principio de Separación de Fisher).

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

En resumen…

1. Un gerente o directivo financiero debería actuar en interés de los accionistas de su empresa.
2. Los accionistas quieren:
   a) Ser lo más ricos posibles.
   b) Transformar esa riqueza en la trayectoria temporal de consumo que maximice su utilidad.
   c) Elegir las características de riesgo de ese consumo
3. Los accionistas no necesitan la ayuda del director financiero para alcanzar el consumo que desean ya que tienen acceso por sí mismos al mercado de capitales.
4. El directivo puede entonces ayudar a los accionistas invirtiendo en todos los proyectos que tenga en carpeta que tengan un VPN positivo.

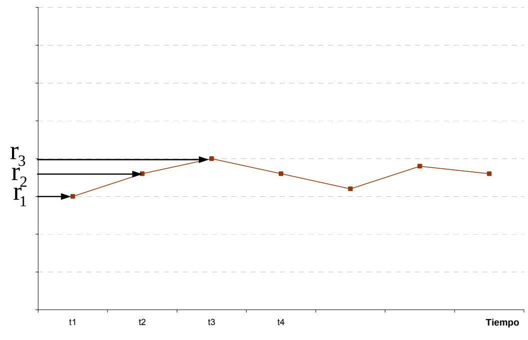
INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tasas Spots

La tasa spot r_t es la tasa de interés expresada en términos anuales que se le aplicaría a un flujo mantenido desde hoy hasta un plazo t.

Ej.:

Si se quiere valorar un bono a 3 años que paga cupones anuales por un valor de $10 y que amortiza 100 al final.



$$VP = \frac{10}{(1+r_1)} + \frac{10}{(1+r_2)^2} + \frac{110}{(1+r_3)^3}$$

A la curva del gráfico se le dice curva cero cupón

Estructura de tasas

La estructura de tasas refleja el costo de oportunidad de un inversionista a diferentes plazos. Esta es clave para valorar activos.

Se puede representar como:

- Curva Cero Cupón
- Curva de Rendimientos (Yield Curve)
- Curva de Factores de Descuento

Por otro lado, combinaciones de curvas de interés generan curvas de monedas, curvas de tasas forward, etc.

Inflación

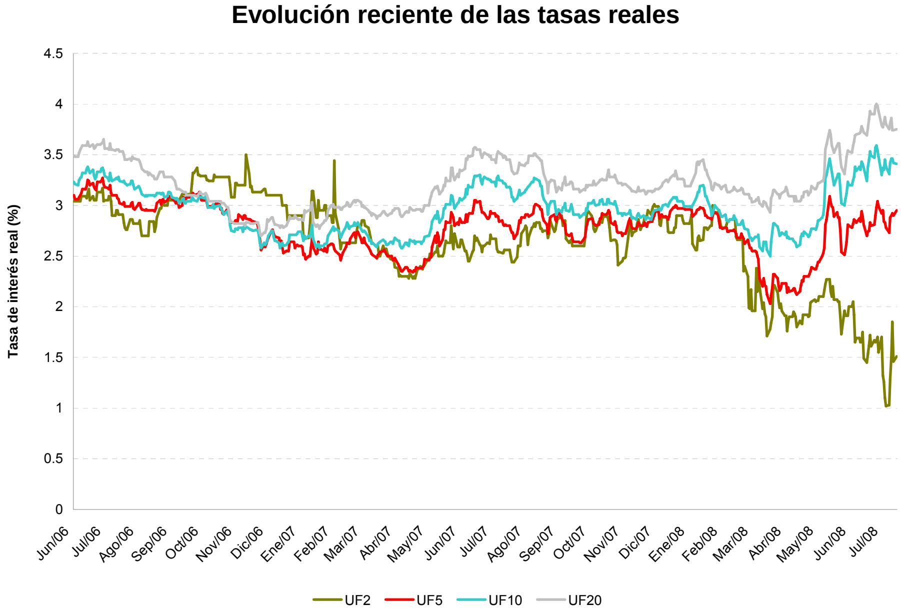
En Chile, las tasas de descuento normalmente se cotizan en términos reales, a diferencia de los Estados Unidos donde usualmente se cotizan en términos nominales.

Si la tasa de inflación es π, entonces:

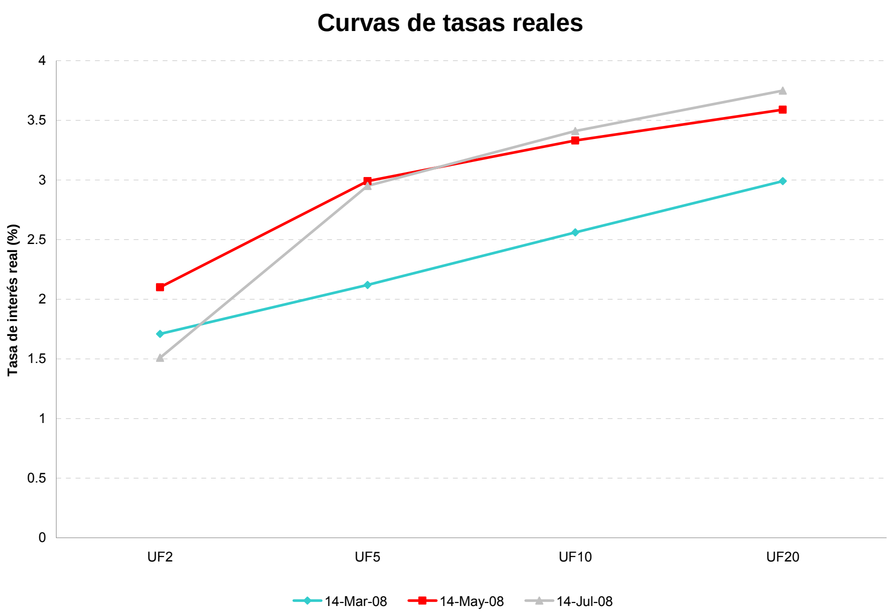
$$\boxed{(1 + r_{real})(1 + \pi) = 1 + r_{nominal}}$$

La clave está en ser consistente en el tratamiento de la inflación.

Tasas de interés recientes



Estructura de tasas recientes



Tasas Forwards

Es la tasa de interés para pedir prestado entre dos fechas futuras dadas las condiciones de mercado actuales.

Ej.:

Supongamos que r_1 y r_2 son las tasas spot a 1 y 2 años respectivamente. Si se invierte $1 a 2 años, se obtiene $\$(1+r_2)^2$

Alternativamente, se puede invertir a 1 año y luego de 1 a 2, a la tasa f_2.

Para que no haya arbitraje, se debe cumplir que:

$$(1+r_2)^2 = (1+r_1)(1+f_2)$$

Principio de no arbitraje

Para que no haya arbitraje, los flujos de una misma fecha deben ser valorizados a la misma tasa spot.

Ej.:

r1	r2	r3
6%	6.50%	6.80%

		t		
Bono	**P**	**1**	**2**	**3**
A	100.34	10	10	100
B	132.30	50	50	50
C	123.13	0	0	150
(-5A+B+3C)	0	0	0	0

¿Qué pasaría si el Precio del bono B fuera $130?

(5A-B-3C)	2.30	0	0	0