PROBLEMA Nº1

El mercado de capitales de un pequeño lejano país está compuesto por 4 instrumentos. Los retornos esperados de cada uno de ellos son los siguientes:

| | Acción A | Acción B | Acción C | Acción D |
|---|---|---|---|---|
| Retorno | 15% | 20% | 17% | 5% |

Y la siguiente matriz de varianzas-covarianzas:

| | Acción A | Acción B | Acción C | Acción D |
|---|---|---|---|---|
| Acción A | 0,0625 | 0,0525 | 0,0280 | 0,0280 |
| Acción B | 0,0525 | 0,1225 | 0,0294 | 0,0280 |
| Acción C | 0,0280 | 0,0294 | 0,0784 | 0,0134 |
| Acción D | 0,0280 | 0,0280 | 0,0134 | 0,0576 |

a) Calcule el retorno esperado y la volatilidad de un portafolio compuesto por $4.500.000 de A y $5.500.000 de C

Debemos recordar que si tenemos un portafolio de dos activos de pesos $w$ y $(1-w)$ respectivamente se tiene que:

$$r_p = wr_1 + (1-w)r_2$$

$$\sigma_p^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{1,2}$$

Utilizando este resultado podemos calcular lo pedido:

$$r_p = \frac{4,5}{10}0,15 + \frac{5,5}{10}0,17 = 0,161 = 16,1\%$$

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{4,5}{10}\right)^2 \cdot 0,0625 + \left(\frac{4,5}{10}\right)^2 \cdot 0,0784 + 2 \cdot \left(\frac{4,5}{10}\right)\left(\frac{5,5}{10}\right) \cdot 0,0280 = 0,0502$$

$$\sigma_p = \sqrt{0,0502} = 0,224 = 22,4\%$$

b) Cuánto debe invertir de su capital total en A y en C si ahora lo que busca es tener la menor volatilidad posible para una cartera compuesta sólo por esas dos acciones? ¿Cuál es el retorno esperado y varianza de esta cartera?

Es sabido que en un portafolio de mínima varianza compuesto por dos activos en proporción $w$ y $(1-w)$ respectivamente:[1]

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}}$$

Luego se tiene que:

$$w_A = \frac{\sigma_C - \sigma_{AC}}{\sigma_A^2 + \sigma_C^2 - 2\sigma_{A,C}} = \frac{0{,}0784 - 0{,}0280}{0{,}0625 + 0{,}0784 - 2 \cdot 0{,}0280} = 0{,}594$$

$$\rightarrow w_C = 1 - 0{,}594 = 0{,}406$$

$$r_p = 0{,}594 \cdot 0{,}15 + 0{,}406 \cdot 0{,}17 = 0{,}158 = 15{,}8\%$$

$$\sigma_p^2 = 0{,}594^2 \cdot 0{,}0625^2 + 0{,}406^2 \cdot 0{,}0784^2 + 2 \cdot 0{,}594 \cdot 0{,}406 \cdot 0{,}0280 = 0{,}0485$$

c) Suponga ahora que usted desea agregar la Acción B a su cartera de la parte b), compuesta por A y C. ¿Cuánto debe invertir en B de manera que se minimice el riesgo total de la nueva cartera?. cartera? ¿Cuál es la volatilidad y el retorno esperado de esta nueva cartera? Además suponga que tiene más dinero para invertir en B, es decir, asuma que tiene invertido $10.000.000 en A y C en conjunto de acuerdo al resultado de la parte anterior y quiere invertir un monto X a parte de esos $10.000.000 en la Acción B.

Debemos hallar los w que minimicen el riesgo total de la cartera compuesta por la cartera AC (obtenida de b) y la Acción B. Para ello debemos usar la volatilidad de la cartera calculada en la parte b) pero además debemos calcular la covarianza entre la cartera AC y la Acción B.

$$\sigma_{AC,B} = cov(AC, B)$$

$$= cov(0{,}594 \cdot r_A + 0{,}406 \cdot r_C\,, r_B)$$

$$= cov(0{,}594 \cdot r_A\,, r_B) + cov(0{,}406 \cdot r_C\,, r_B)$$

$$= 0{,}594 \cdot cov(r_A, r_B) + 0{,}406 \cdot cov(r_C, r_B)$$

$$= 0{,}594 \cdot \sigma_{A,B} + 0{,}406 \cdot \sigma_{C,B}$$

$$= 0{,}594 \cdot 0{,}0525 + 0{,}406 \cdot 0{,}0294$$

$$\rightarrow \sigma_{AC,B} = 0{,}0431$$

Luego, usando el resultado de la cartera de mínima varianza:

$$w_{AC} = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{AC,B}}{\sigma_{AC}^2 + \sigma_B^2 - 2 \cdot \sigma_{AC,B}} = \frac{0{,}1225 - 0{,}0431}{0{,}0485 + 0{,}1225 - 2 \cdot 0{,}0431} = 0{,}936 = 93{,}6\%$$

$$w_B = 1 - 0{,}936 = 0{,}064 = 6{,}4\%$$

[1] Revisar Auxiliar Nº5

Finalmente, para concluir cuánto invertimos notamos que el 93,6% de la cartera corresponde a \$10.000.000 invertidos en A y C. Por lo tanto en B se invierte:

$$X = \frac{0{,}064 \cdot 10000000}{0{,}936} = \$683.760$$

$$r_p = 0{,}936 \cdot 0{,}158 + 0{,}064 \cdot 0{,}20 = 0{,}161 = 16{,}1\%$$

$$\sigma_p^2 = 0{,}936^2 \cdot 0{,}0485 + 0{,}064^2 \cdot 0{,}1225 + 2 \cdot 0{,}936 \cdot 0{,}064 \cdot 0{,}0431 = 0{,}0482$$

$$\rightarrow \sigma_p = \sqrt{0{,}0482} = 0{,}219 = 21{,}9\%$$

PROBLEMA Nº2

En al año 2005, después de años de fusiones entre conglomerados, sólo 2 grandes conglomerados quedan en la Bolsa de Comercio de Nueva York. Por conveniencia, llamaremos a estas firmas A y B. Cada una aporta con la mitad de la riqueza en el portafolio de mercado. Se han dado los siguientes datos:

| | Firma A | Firma B |
|---|---|---|
| Retorno esperado | 23% | 13% |
| Desviación estándar | 40% | 24% |

Además se sabe que el coeficiente de correlación entre la Firma A y la Firma B es $\rho_{AB} = 0{,}8$

a) ¿Cuál es el retorno esperado del portafolio de mercado?

Del enunciado se tiene que $w_A = w_B = 0{,}5$. Luego,

$$r_m = w_A r_A + w_B r_B = 0{,}18 = 18\%$$

b) ¿Cuál es la desviación estándar del portafolio de mercado?

$$\sigma_m^2 = w_A^2 r_A^2 + w_B^2 r_B^2 + 2 w_A w_b \sigma_A \sigma_B \rho_{AB} = 0{,}0928$$

$$\rightarrow \sigma_m = \sqrt{0{,}0928} = 30{,}46\%$$

c) ¿Cuáles son los Betas de las firmas A y B?

$$\beta_A = \frac{cov(r_A, r_m)}{\sigma_m^2} = \frac{cov(r_A, w_A r_A + w_B r_B)}{\sigma_m^2} = \frac{cov(r_A, w_A r_A) + cov(r_A, w_B r_B)}{\sigma_m^2}$$

$$= \frac{w_A cov(r_A, r_A) + w_B cov(r_A, r_B)}{\sigma_m^2} = \frac{w_A \sigma_A^2 + w_B \sigma_A \sigma_B \rho_{AB}}{\sigma_m^2} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}4^2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}8}{0{,}0928} = 0{,}1184$$

Para calcular $\beta_B$ se puede realizar el mismo procedimiento, o notar que:

$$\sigma_m^2 = \sum w_i \sigma_{im} \rightarrow 1 = \sum \frac{w_i \sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \sum w_i \beta_i$$

Luego,

$$1 = w_A\beta_A + w_B\beta_B \rightarrow \beta_B = \frac{1 - w_A\beta_A}{w_B} = 0{,}724$$

d) Asumiendo que la tasa libre de riesgo es del 10%. ¿Son las tasas de retornos esperadas de A y B consistentes con CAPM?

Si se calculan las rentabilidades esperadas para A y B según CAPM:

$$r_A = r_f + \beta_A(r_m - r_f) = 20{,}2\%$$
$$r_B = r_f + \beta_B(r_m - r_f) = 15{,}79\%$$

Claramente las rentabilidades esperadas según los datos del problema no son coherentes con CAPM. Esto no quiere decir que hay un error en la resolución, sino más bien, que se utilizó otro método para estimar los retornos esperados (por ejemplo APT).

PROBLEMA Nº3

Suponga que en un mundo en donde se cumple el CAPM, la tasa libre de riesgo es de 5%, y la cartera de mercado se estima que tiene un retorno esperado de 12%, mientras que la volatilidad de la cartera de mercado es de 30%.

a) Si un inversionista quisiera recibir en valor esperado alrededor de 20% en rentabilidad. Cuál debiera ser la composición de su cartera (entre cartera de mercado y activo libre de riesgo), y cuánto sería el riesgo mínimo a que debiera exponerse?

Debemos encontrar $w$ de tal forma que se cumpla:

$$0{,}2 = w \cdot 0{,}12 + (1 - w) \cdot 0{,}05 \rightarrow w = 2{,}14 \; y \; (1 - w) = -1{,}14$$

Según la LMC, se tiene la siguiente expresión:[2]

$$r = \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma_m} \cdot \sigma + r_f$$

Despejando $\sigma$, obtenemos que:

$$\sigma = \frac{(0{,}2 - 0{,}05) \cdot 0{,}3}{0{,}12 - 0{,}05} = 0{,}6428 = 64{,}3\%$$

b) Si le ofrecen un proyecto con una rentabilidad esperada de 8% y un beta de 0,5 ¿Debería tomarlo? Explique

Aplicando CAPM,

$$r_i = r_f + \beta(r_m - r_f) = 0{,}05 + 0{,}5 \cdot (0{,}12 - 0{,}05) = 8{,}5\%$$

Como 8% es menor que 8,5% no se debería aceptar la propuesta, dado que se está ganando menos de lo que se podría obtener acudiendo al mercado.

c) Suponga que uno de los activos que conforman la cartera de mercado (Activo A) tiene una volatilidad de 50%, y un beta de 0,8. Mientras que el Activo B tiene una volatilidad de 30%

[2] Ver Auxiliar Nº5

y un beta de 1,2. ¿Es posible encontrar una combinación de A y B tal que el beta de esta nueva cartera sea cero? En caso afirmativo, encuentre el retorno esperado de esta cartera.

Si el beta del activo A es $\beta_A$ y el beta del activo B es $\beta_B$, entonces el beta de una cartera que invierte $w$ en A y $(1-w)$ en B es:

$\beta = w\beta_A + (1-w)\beta_B$

Imponiendo que $\beta = 0$, se tiene que:

$w \cdot 0{,}8 + (1-w) \cdot 1{,}2 = 0 \rightarrow w = 3 \; y \; (1-w) = -2$

$r_c = 3r_A - 2_{r_B}$

Por CAPM se tiene que:

$r_A = r_f + 0{,}8(0{,}12 - 0{,}05) = 0{,}106$

$r_B = r_f + 1{,}2(0{,}12 - 0{,}05) = 0{,}134$

Luego se tiene que:

$r_c = 3 \cdot 0{,}106 - 2 \cdot 0{,}134 = 0{,}05$

## PROBLEMA Nº4

Imagine que un modelo APT es apropiado para describir los retornos de una acción. En esta ocasión se estima que los retornos esperados de los activos presentes en el mercado dependen de sólo dos factores: La inflación y el precio del petróleo.

| Activo | Factor 1: Inflación | Factor 2: Precio Petróleo |
|---|---|---|
| X | 1,75 | 0,25 |
| Y | -1 | 2 |
| Z | 2 | 1 |

Suponga que el premio por riesgo del factor 1 es de 4%, y del factor 2 es de 8%.

a) Muestre dos formas posibles de construir un portafolio que tiene sensibilidad de 0,5 al factor 1. Compare los premios por riesgo de cada inversión.

Sea $w_i$ el peso relativo del activo $i$. Necesitamos imponer que:

$$w_x \cdot 1{,}75 + w_y \cdot -1 + w_z \cdot 2 = 0{,}5$$
$$w_x + w_y + w_z = 1$$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas, por lo que hay infinitas soluciones. Eligiendo 2 de ellas, se tiene que:

Alternativa 1: $w_x = 0; w_y = 0{,}5; w_z = 0{,}5$

$$Premio_{Alt1} = 0 \cdot (1{,}75 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}08) + 0{,}5 \cdot (-1 \cdot 0{,}04 + 2 \cdot 0{,}08) + 0{,}5 \cdot (2 \cdot 0{,}04 + 1 \cdot 0{,}08)$$

$$\rightarrow Premio_{Alt1} = 0{,}14 = 14\%$$

Alternativa 2: $w_x = \frac{6}{11}; w_y = \frac{5}{11}; w_z = 0$

$$Premio_{Alt2} = \left(\frac{6}{11}\right) \cdot (1{,}75 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}08) + \left(\frac{5}{11}\right) \cdot (-1 \cdot 0{,}04 + 2 \cdot 0{,}08) + 0 \cdot (2 \cdot 0{,}04 + 1 \cdot 0{,}08)$$

$$\rightarrow Premio_{Alt2} = 0{,}104 = 10{,}4\%$$

b) Suponga que los premios por riesgo de X, Y y Z son 8%, 14% y 16%, respectivamente. Construya un portafolio que tiene sensibilidad cero a cada factor y que tiene un premio por riesgo positivo. ¿Se cumple el APT en este caso?

Factor 1: $w_x \cdot 1{,}75 + w_y \cdot -1 + w_z \cdot 2 = 0$

Factor 2: $w_x \cdot 0{,}25 + w_y \cdot 2 + w_z \cdot 1 = 0$

Además se tiene que,

$w_x + w_y + w_z = 1$

Tenemos 3 ecuaciones y tres incógnitas. Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene que:

$$w_x = -2; w_y = -0{,}5; w_z = 1{,}5$$

El premio por riesgo de este portafolio es:

$$-2 \cdot 0{,}08 + (-0{,}5) \cdot 0{,}14 + 1{,}5 \cdot 0{,}16 = 0{,}01$$

Dado que la sensibilidad a cada factor es cero, el premio por riesgo debiera ser cero. Por lo tanto, el APT no se cumple.