6. CAPM: Capital Asset Pricing Model

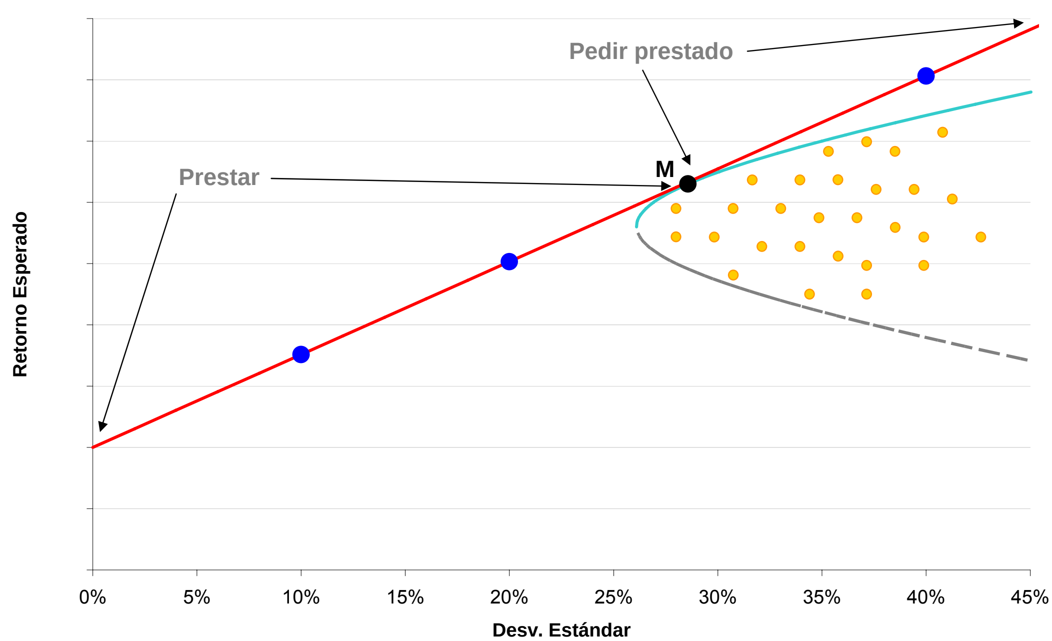
IN56A

Otoño 2009

Gonzalo Maturana F.

Recuerdo cap. anterior…

Frontera de Inversión (Eficiente)



INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Hacia el CAPM (I)

Supongamos que el portafolio M es eficiente para un inversionista en particular que puede prestar y pedir prestado a una tasa r_f.

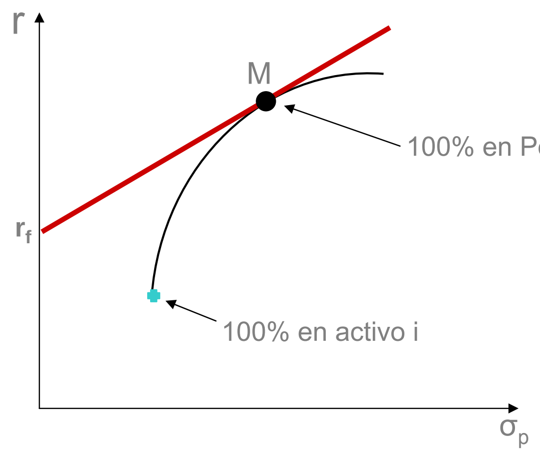
Dado que el portafolio M es eficiente, no existe ninguna otra combinación del portafolio con otro activo i que tenga una mayor ratio de retornos sobre r_f (prima por riesgo) por unidad de riesgo.

- El portafolio tiene el mayor *Sharpe Ratio*.

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Hacia el CAPM (II)

Consideremos todas las combinaciones entre el portafolio M y el activo i.



La curva muestra todos los pares ordenados (desviación estándar, retorno) para el portafolio resultante q.

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Hacia el CAPM (III)

La cartera q, compuesta por el activo i y la cartera M tiene retorno y varianza descritos por:

$$\boxed{\begin{aligned} r_q &= \alpha \cdot r_i + (1-\alpha)\cdot r_M \\ \sigma_q^2 &= \alpha^2 \cdot \sigma_i^2 + (1-\alpha)^2 \cdot \sigma_M^2 + 2\cdot\alpha\cdot(1-\alpha)\cdot\sigma_{i,M} \end{aligned}}$$

Nota: El instrumento i puede estar incluido en M pero mantendremos los ponderadores para M fijos.

La pendiente de la línea de retorno riesgo para el portafolio q se calcula como

$$\boxed{\frac{dr_q}{d\sigma_q} = \frac{\dfrac{\partial r_q}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial \sigma_q}{\partial \alpha}}}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Hacia el CAPM (IV)

Desarrollando:

$$\frac{\partial r_q}{\partial \alpha} = r_i - r_M$$

$$\frac{\partial \sigma_q}{\partial \alpha} = \frac{1}{2\cdot\sigma_q}\cdot\frac{\partial \sigma_q^2}{\partial \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_q}{\partial \alpha} = \frac{1}{2\cdot\sigma_q}\cdot\left[2\cdot\alpha\cdot\sigma_i^2 - 2\cdot(1-\alpha)\cdot\sigma_M^2 + 2\cdot(1-\alpha)\cdot\sigma_{i,M} - 2\cdot\alpha\cdot\sigma_{i,M}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_q}{\partial \alpha} = \frac{\alpha\cdot\left(\sigma_i^2 + \sigma_M^2 - 2\cdot\sigma_{i,M}\right) + \sigma_{i,M} - \sigma_M^2}{\sigma_q}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Hacia el CAPM (V)

Evaluando en $\alpha = 0$, es decir, todo invertido en la cartera M ($\sigma_q = \sigma_M$ cuando $\alpha = 0$):

$$\boxed{\frac{dr_q}{d\sigma_q} = \frac{r_i - r_M}{\left(\dfrac{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}}$$

La pendiente anterior debe ser igual a la de la Línea de Mercado de Capitales (que une el activo libre de riesgo con la cartera M)

$$\frac{r_M - r_f}{\sigma_M} = \frac{r_i - r_M}{\left(\dfrac{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Hacia el CAPM (VI)

Desarrollando:

$$\frac{r_M - r_f}{\sigma_M} = \frac{r_i - r_M}{\left(\dfrac{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)} \qquad /\cdot \sigma_M$$

$$r_M - r_f = \frac{r_i - r_M}{\left(\dfrac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} - 1\right)}$$

$$(r_M - r_f)\cdot\left(\frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} - 1\right) = r_i - r_M$$

$$\frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}\cdot(r_M - r_f) - r_M + r_f = r_i - r_M \Rightarrow \quad \boxed{r_i - r_f = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}\cdot(r_M - r_f)}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Hacia el CAPM (VII)

Definimos:

$$\boxed{\beta_{i,M} = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}}$$

Luego la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\boxed{r_i - r_f = \beta_{i,M} \cdot (r_M - r_f)}$$

• La ecuación dice que el exceso de rentabilidad de un activo por sobre el activo libre sin riesgo es proporcional al exceso de rentabilidad de cualquier cartera eficiente (no sólo M) por sobre el activo libre de riesgo.

•.El beta (o *loading*) es una medida estandarizada de la covarianza del activo i con la cartera de mercado.

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

CAPM (I)

• Los inversionistas buscan una rentabilidad alta y un riesgo bajo. Las carteras de activos que ofrecen la mejor relación riesgo – retorno son conocidas como carteras eficientes.

•Si todos los inversionistas tienen las mismas creencias sobre los retornos esperados de los activos, entonces todos tendrán el mismo portafolio eficiente M.

• Dependiendo de sus preferencias, cada inversor tendrá su propia combinación entre la cartera de mercado y el activo libre de riego (pueden endeudarse o prestar a r_f).

• El riesgo total de un activo no es lo central. Lo que le importa al inversionista es el impacto marginal del activo sobre el riesgo de su cartera, es decir, su contribución al riesgo.

• La contribución al riesgo depende de la sensibilidad de las acciones a las variaciones en el valor de la cartera.

• La sensibilidad de una cartera a las variaciones en el valor de la cartera de mercado es lo que definimos como beta. De esta forma el beta mide la contribución marginal de una acción al riesgo de la cartera de mercado (tiene que ver con el riesgo sistemático o no diversificable).

CAPM (II)

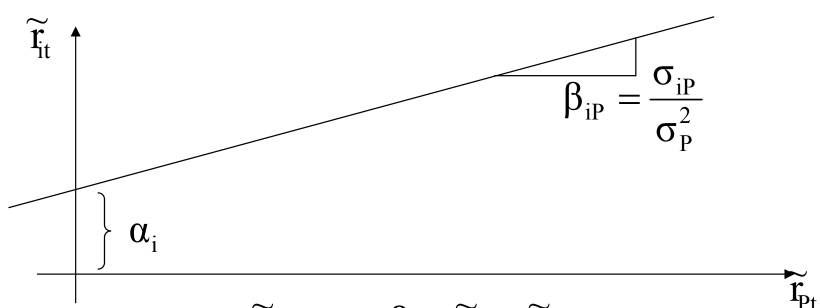
De esta forma, la tasa de retorno esperada de una acción debería ser una función positiva de su beta

- .Según el modelo CAPM:

$$\boxed{r_i - r_f = \beta_i \cdot \left(r_M - r_f\right)}$$

Estimación del beta (I)

El beta de una compañía se estima típicamente mediante una regresión con datos históricos.

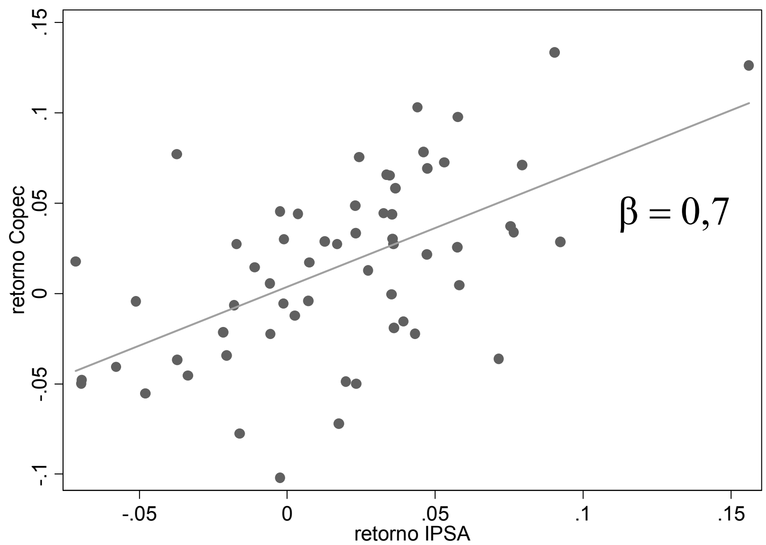


$$\tilde{r}_{it} = \alpha_i + \beta_{iP} \cdot \tilde{r}_{Pt} + \tilde{e}_t$$

* Se puede trabajar con retornos o excesos de retorno (cambia la interpretación del parámetro alpha)

Estimación del beta (II)

Ejemplo: Beta con respecto a índice de mercado IPSA de Copec

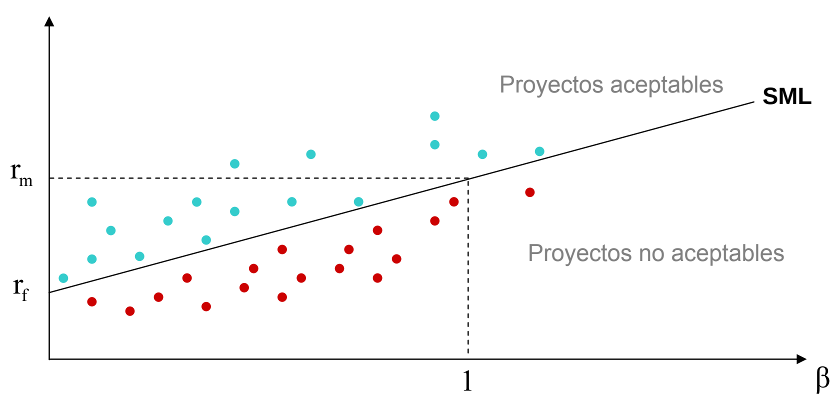


* Retornos mensuales, estimación a septiembre 2008

Línea del mercado de títulos

Relación lineal entre retorno esperado y beta permite discriminar aquellas inversiones que son aceptables

•.Se crea valor aceptando proyectos que generan un retorno esperado mayor al requerido por CAPM



Diversificación y carteras

El beta de una cartera corresponde al promedio ponderado de los betas individuales que la componen.

$$\boxed{\beta_C = \sum_i w_i \cdot \beta_i}$$

El riesgo de un activo puede descomponerse en una componente sistemática (no diversificable) y otra no sistemática (diversificable).

$$r_i - r_f = \beta_{i,M} \cdot (\bar{r}_M - r_f) + \varepsilon \qquad /Var(\cdot)$$
$$Var(r_i - r_f) = Var(\beta_{i,M} \cdot (\bar{r}_M - r_f) + \varepsilon)$$

- Aplicando las propiedades de la varianza y considerando que σ_f =0:

$$\sigma_i^2 = \underbrace{\boxed{\beta_i^2 \cdot \sigma_M^2}}_{\text{Componente sistemática}} + \underbrace{\boxed{\sigma_\varepsilon^2}}_{\text{Componente no sistemática o específica}}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Testeo del CAPM

Como hemos visto, la predicción central del modelo CAPM es que el portafolio de mercado es eficiente en términos de media-varianza, lo que tiene dos implicancias principales:

- .La relación entre los retornos esperados de los activos y su parámetro beta de mercado es una función lineal positiva.
- El beta de mercado es suficiente para explicar las diferencias en corte transversal de los retornos esperados entre acciones.

Problemas prácticos:

- Medición de retornos esperados.
- Medición del portafolio de mercado.
- Medición del beta.

Validez del CAPM (I)

Black, Jensen y Scholes (1972) y Fama y Macbeth (1973) validaron el modelo CAPM.

- Trabajaron con los precios de las acciones del NYSE desde 1926 a 1968.

Posteriormente, en 1992, Fama y French demostraron que la relación positiva entre el beta de mercado y los retornos promedio en el NYSE desapareció para el periodo comprendido entre 1963 y 1990.

- Otras variables mostraban una enorme capacidad para explicar las diferencias en los retornos promedio entre acciones (ME, BE/ME, E/P, *leverage*).
  - Acciones de empresas pequeñas (bajo ME) han tenido un retorno significativamente mejor que lo que predice CAPM.
  - Acciones con ratio valor libro a valor de mercado del patrimonio (alto BE/ME) han tenido una rentabilidad significativamente mejor que lo que predice CAPM.
  - Controlando por las 2 características anteriores el beta de mercado tendría poco poder explicativo de las diferencias observadas en los retornos de las acciones.

Validez del CAPM (II)

La definición y medición del portafolio de mercado siempre ha sido un problema:

- Si se usa el índice de mercado equivocado se pueden tener resultados equivocados (Roll).

Existen modelos competidores (APT).

Pese a todo lo anterior, el CAPM sigue siendo una herramienta muy atractiva:

- Es simple y directo
- Entrega respuestas razonables e intuitivas.
- Distingue entre riesgo sistemático y diversificable.
- Se ha comprobado que los retornos de largo plazo están significativamente correlacionados con el beta.

Beta y el precio de activos

Supongamos que compramos un activo a un precio P y lo vendemos a Q en un año más (Q es aleatorio).

El retorno esperado de la inversión es: $r = \frac{Q_E - P}{P}$

Incorporando la fórmula del CAPM:

$$\frac{Q_E - P}{P} = r = r_f + \beta_Q \cdot \left(\bar{r}_M - r_f\right)$$

$$\Rightarrow P = \frac{Q_E}{1 + r_f + \beta_Q \cdot \left(\bar{r}_M - r_f\right)}$$