

Pauta Clase Auxiliar IN56A

Pregunta 1:

Considere una economía en que existen sólo dos activos con correlación distinta de cero. Si usted quiere obtener una cartera con varianza mínima, encuentre la composición de cada uno de los activos en la cartera. ¿Cuál será el retorno esperado de la cartera?

Solución:

Si en la economía existen dos activos, con correlación distinta de cero, se debe resolver el siguiente problema de optimización cuadrática para minimizar la varianza.

$$\begin{aligned} \min w' \Omega w \\ \text{s. a. } \sum w_i = 1 \\ w_i \geq 0, \forall i \end{aligned}$$

Luego, si en la economía existen dos activos, la expresión queda

$$\min \sigma^2 = w^2 * \sigma_1^2 + (1 - w)^2 * \sigma_2^2 + 2 * w * (1 - w) * \sigma_1 * \sigma_2 * \rho_{12}$$

Derivando la expresión con respecto a w , obtenemos la condición de primer orden.

$$\frac{d\sigma^2}{dw} = w * \sigma_1^2 - (1 - w) * \sigma_2^2 + (1 - w) * \sigma_1 * \sigma_2 * \rho_{12} - w * \sigma_1 * \sigma_2 * \rho_{12} = 0$$

Despejando w de la ecuación, obtenemos

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1 * \sigma_2 * \rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 * \sigma_1 * \sigma_2 * \rho_{12}}$$

Luego, la composición del activo 1, es w , y la del activo 2 es $(1-w)$.

El retorno esperado es $E(R) = w * R_1 + (1 - w) * R_2$

Pregunta 2:

Considere dos activos A y B con correlación 0,1.

Activo	Retorno esperado	Volatilidad
A	10%	15%
B	18%	30%

- a) Suponga que Ud. invierte en una cartera C, la cual está constituida en un 50% del activo A y en un 50% del activo B. ¿Cuál es el retorno esperado y la volatilidad de la cartera C?
- b) Argumente si C es o no un punto de la frontera “eficiente” de carteras (es decir, carteras preferidas por agentes aversos al riesgo)
- c) Determine el coeficiente de correlación entre el portafolio C y el activo A. Hint: Recuerde que $\text{Rho}(R_1, R_2) = \text{Cov}(R_1, R_2) / (\text{Sigma}(R_1) * \text{Sigma}(R_2))$ y además que $\text{Cov}(R_1, R_2) = E(R_1 * R_2) - E(R_1) * E(R_2)$
- d) Suponga que existe además en esta economía un activo libre de riesgo, con retorno de 5%. Construya una cartera D con w% invertido en el activo libre de riesgo y (1-w)% en la cartera C. Encuentre el retorno esperado y la volatilidad de D en función de w.
- e) Discuta si la introducción de un activo libre de riesgo altera la frontera eficiente de las carteras.

Solución:

- a) Suponga que Ud. invierte en una cartera C, la cual está constituida en un 50% del activo A y en un 50% del activo B. ¿Cuál es el retorno esperado y la volatilidad de la cartera C?

La cartera C está constituida en un 50% por el activo A, y en un 50% por el activo B.

El retorno esperado es:

$$E(R_C) = 0,5 * 10\% + 0,5 * 18\% = 14\%$$

La varianza es

$$\sigma^2 = 0,5^2 * 0,15^2 + 0,5^2 * 0,3^2 + 2 * 0,5 * 0,5 * 0,15 * 0,3 * 0,1 = 0,03$$

Luego la volatilidad es

$$\sigma = \sqrt{0,03} = 0,1743 = 17,43\%$$

- b) Argumente si C es o no un punto de la frontera “eficiente” de carteras (es decir, carteras preferidas por agentes aversos al riesgo)

Para que C sea un punto de la frontera eficiente de carteras, los pesos deben ser solución del problema de minimización de la pregunta 1. Así, debe cumplir que:

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1 * \sigma_2 * \rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 * \sigma_1 * \sigma_2 * \rho_{12}}$$

Calculando,

$$w = \frac{0,3^2 - 0,15 * 0,3 * 0,1}{0,15^2 + 0,3^2 - 2 * 0,15 * 0,3 * 0,1} = 0,826 = 82,6\%$$

Luego, la volatilidad mínima es:

$$\sigma^2 = 0,826^2 * 0,15^2 + 0,174^2 * 0,3^2 + 2 * 0,826 * 0,174 * 0,15 * 0,3 * 0,1 = 0,0193$$

$$\sigma = \sqrt{0,01936} = 0,1392 = 13,92\%$$

$$E(R_C) = 0,826 * 10\% + 0,174 * 18\% = 11,39\%$$

- c) Determine el coeficiente de correlación entre el portafolio C y el activo A.
Hint: Recuerde que $\text{Rho}(R1,R2) = \text{Cov}(R1,R2)/(\text{Sigma}(R1)*\text{Sigma}(R2))$ y además que $\text{Cov}(R1,R2) = E(R1*R2) - E(R1)*E(R2)$

Se debe recordar que la covarianza es lineal. Dado esto,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(R, R1) &= \text{Cov}(0,5 * R1 + 0,5 * R2, R1) \\ \text{Cov}(R, R1) &= 0,5 * \text{Cov}(R1, R1) + 0,5 * \text{Cov}(R2, R1) \\ \text{Cov}(R, R1) &= 0,5 * \sigma_1^2 + 0,5 * \text{Cov}(R1, R2) \\ \text{Cov}(R, R1) &= 0,5 * 0,15^2 + 0,5 * 0,15 * 0,3 * 0,1 = 0,0135 \end{aligned}$$

Luego, podemos calcular el coeficiente de correlación

$$\rho = \frac{Cov(R, R1)}{\sigma_C * \sigma_1} = \frac{0,0135}{0,1743 * 0,15} = 0,516$$

- d) Suponga que existe además en esta economía un activo libre de riesgo, con retorno de 5%. Construya una cartera D con w% invertido en el activo libre de riesgo y (1-w)% en la cartera C. Encuentre el retorno esperado y la volatilidad de D en función de w.

Con los datos del problema, el retorno esperado de la cartera D es:

$$E(R) = w * 0,05 + (1 - w) * 0,14$$

Dado que el activo libre de riesgo, posee volatilidad cero, la volatilidad de la cartera D es:

$$\sigma_D = (1 - w) * \sigma_C$$

Donde σ_C es la volatilidad de la cartera C, conocida.

- e) Discuta si la introducción de un activo libre de riesgo altera la frontera eficiente de las carteras.

Al introducir un activo libre de riesgo, se crea la Línea de Mercado de Capitales, la cual es una recta que corta tangente a la frontera eficiente, y corta el eje de la rentabilidad en el valor de la rentabilidad del activo libre de riesgo. Todas aquellas carteras pertenecientes a la línea, son eficientes, y esto permite obtener una cartera con una mayor rentabilidad asumiendo un mismo riesgo que alguna otra de la frontera eficiente.