Auxiliar extra.
Martes 30 de marzo de 2009.

Problema 3 Considere el siguiente juego descrito en forma extensiva:

a) Encuentre las estrategias para el jugador 1 y 2.

b) Identifique todos los subjuegos.

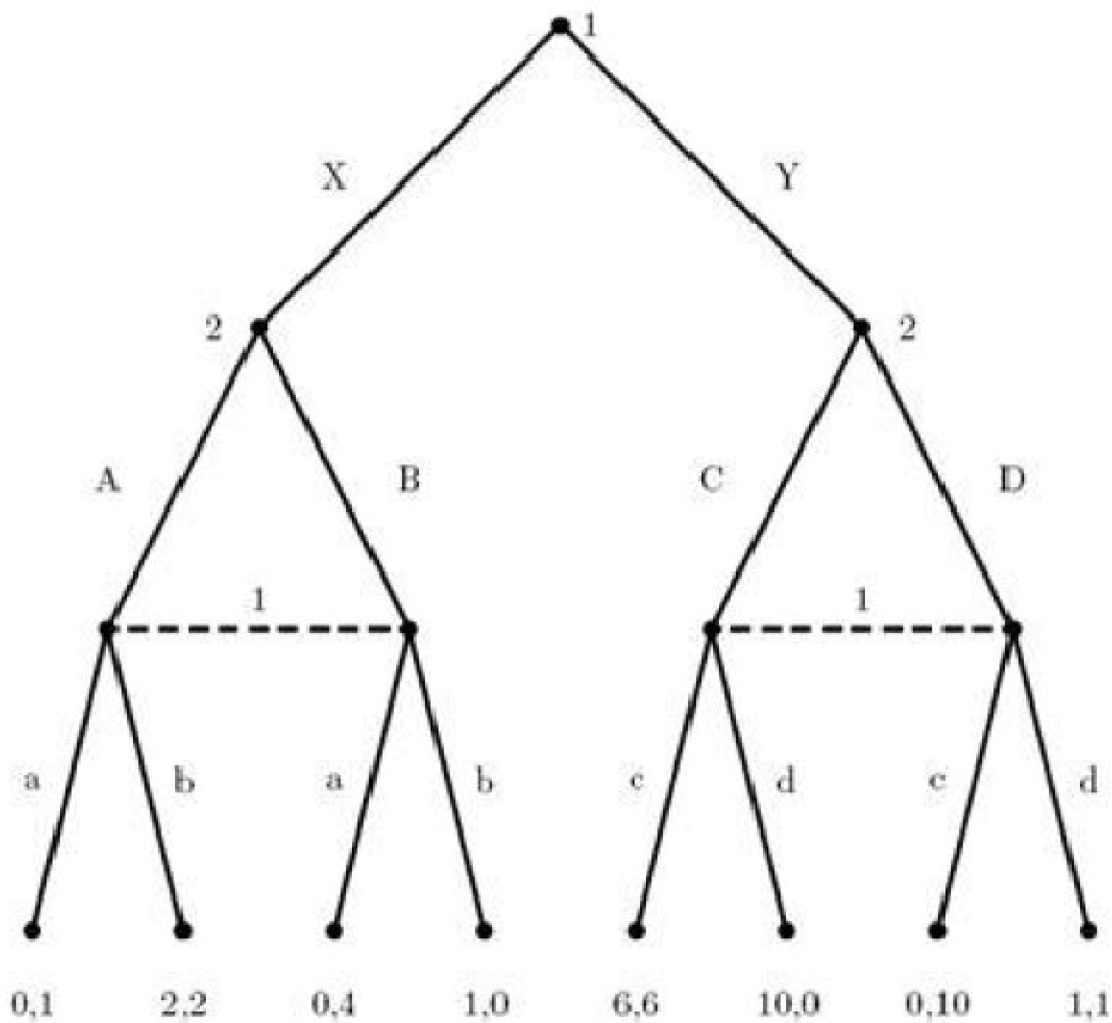
c) Analice el juego que comienza luego de X. Escríbalo en forma normal y encuentre los NE.

d) Analice el juego que comienza luego de Y. Escríbalo en forma normal y encuentre los NE

e) Considere la estrategia $s = (s_1, s_2)$ con $s_1 = (X, b, d)$ y $s_2 = (A, C)$. ¿Es esta estrategia equilibrio de Nash? En caso de serlo, ¿es equilibrio perfecto en el subjuego?

f) Considere la estrategia $s = (s_1, s_2)$ con $s_1 = (Y, a, d)$ y $s_2 = (B, D)$. ¿Es esta estrategia equilibrio de Nash? En caso de serlo, ¿es equilibrio perfecto en el subjuego?

g) Encuentre el SPE del juego.



Solución:

a) Las estrategias del jugador 1 son:
$\{(X,a,c)(X,a,d)(X,b,c)(X,b,d)(Y,a,c)(Y,a,d)(Y,b,c)(Y,b,d)\}$
Las estrategias del jugador 2 son:
$\{(A,C)(A,D)(B,C)(B,D)\}$

b) Los subjuegos son tres. El que parte después de X, el que parte después de Y y el juego completo.

c) La forma normal es:

	A	B
a	0 , 1	0 , $\underline{4}$
b	$\underline{2}$, $\underline{2}$	$\underline{1}$, 0

Para el jugador 1, a es dominada (estrictamente) por b, por lo que a se elimina. Luego B es dominada por A y (b , A) es el único equilibrio de Nash (no hay equilibrios en estrategias mixtas, porque la eliminación de estrategias estrictamente dominadas las excluye).

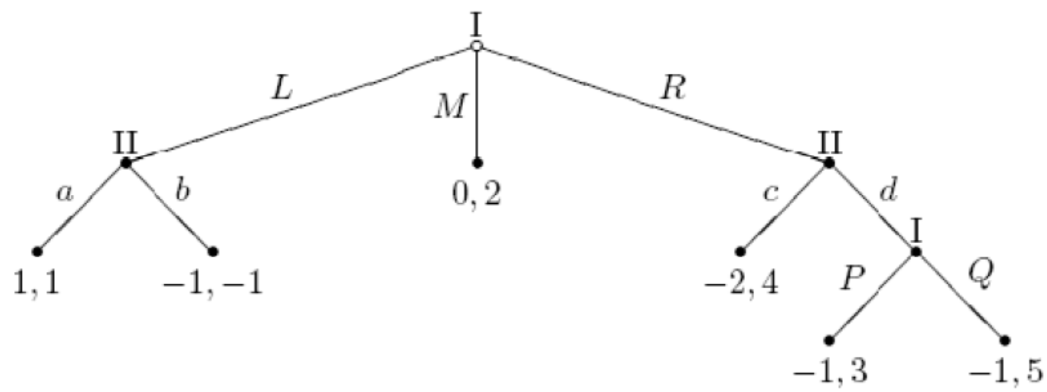
d) Este es un dilema del prisionero. El único equilibrio de Nash es (d , D).

e) No es equilibrio de Nash, porque si el jugador 1 se desvía a (Y,b,d) obtiene una renta 10, que es mayor que 2 que es la del caso base. Entonces tiene incentivos a una desviación unilateral y esto no es equilibrio de Nash.

f) Esto sí es equilibrio de Nash, ya que no se puede mejorar la renta con desviaciones unilaterales. Pero no es perfecto en subjuegos, ya que para eso se necesitaría que fuera un equilibrio de Nash en cada subjuego, y no lo es en el subjuego que parte después de X.

g) El único EPS es $\big((X,b,d),(A,D)\big)$. Esto es porque las partes c) y d) nos dicen acerca de todas las elecciones excepto X o Y, pero para esto el jugador 1 elige entre los pagos de los equilibrios de Nash de los subjuegos. Elige X porque 2 > 1.

4. Considere el siguiente juego en forma extensiva.



- Determine el número de estrategias puras para cada jugador.
- Entregue el juego en forma normal.
- Determine los equilibrios en estrategias puras.
- Encuentre los SPE del juego.

<u>Solución:</u>

El jugador 1 tiene tres estrategias posibles en su primer conjunto de información, y dos en el segundo, por lo que el número total de estrategias puras es $3 \times 2 = 6$. Éstas son $\{(L,P)(L,Q)(M,P)(M,Q)(R,P)(R,Q)\}$.
Análogamente, el jugador 2 tiene 4 estrategia puras posibles.

La forma normal del juego es:

	a,c	a,d	b,c	b,d
L,P	$\underline{1}$, $\underline{1}$	$\underline{1}$, $\underline{1}$	-1, -1	-1, -1
L,Q	$\underline{1}$, $\underline{1}$	$\underline{1}$, $\underline{1}$	-1, -1	-1, -1
M,P	0 , $\underline{2}$	0 , $\underline{2}$	$\underline{0}$, $\underline{2}$	$\underline{0}$, $\underline{2}$
M,Q	0 , $\underline{2}$	0 , $\underline{2}$	$\underline{0}$, $\underline{2}$	$\underline{0}$, $\underline{2}$
R,P	-2 , $\underline{4}$	-1 , 3	-2 , $\underline{4}$	-1 , 3
R,Q	-2 , 4	-1 , $\underline{5}$	-2 , 4	-1 , $\underline{5}$

Los equilibrios de Nash están destacados.

Para encontrar los EPS se debe hacer inducción inversa. En su segundo conjunto de información, el jugador I está indiferente entre P y Q, por lo que le asignará una probabilidad $p \epsilon [0,1]$ (notar los corchetes: puede ser 0 y puede ser 1).
El jugador II, tomará una decisión dependiendo de sus creencias respecto a *p*. Si cree que $p < 1/2$ entonces jugará d. Si cree que $p > 1/2$ entonces jugará c. Y si cree que $p = 1/2$ entonces asignará a c una probabilidad $q \epsilon [0,1]$.
El jugador II, en el conjunto de información de la izquierda elegirá *a*. El jugador I, en su primer conjunto de información, elegirá *L*.
Los EPS entonces son:

$$SPE_1 = \left(\big(L, (p, 1-p)\big), (a, d);\ p < \frac{1}{2}\right)$$

$$SPE_2 = \left(\big(L, (p, 1-p)\big), (a, c);\ p > \frac{1}{2}\right)$$

$$SPE_3 = \Big(\big(L, (1/2\,, 1/2)\big), \big(a, (q, 1-q)\big);\ q \epsilon [0,1]\Big)$$