Auxiliar 1 IN51A

Profesores: Nicolás Figueroa, Ronald Fischer

Auxiliar: Manuel Marfán Sánchez

17 de marzo de 2009

Problema 1: Consumidores están distribuidos uniformemente a lo largo de una línea de largo 1 kilómetro. Los precios de los helados están regulados, por lo que los consumidores pueden ir a comprar únicamente al punto más cercano (asuma que independiente de la lejanía de este punto, todo agente va a consumir helados). Si existe más de un vendedor en el mismo punto, se reparten el negocio equitativamente.

(i) Considere un juego en que dos vendedores de helados deben elegir sus ubicaciones simultáneamente. Muestre que existe sólo un equilibrio. Caracterícelo.

(ii) Pruebe que si hay 3 vendedores, no existe equilibrio en estrategias puras.

<u>Solución:</u>

(i)

Sea S = [0 , 1] el espacio de estrategias de los jugadores. Llamemos s_i la estrategia elegida por el jugador i.

Primero, demostraremos que un conjunto de estrategia en que ambos jugadores eligen estrategias distintas no puedes ser un equilibrio de Nash.

Sean $s_1, s_2 \in S$ con $s_1 < s_2$

En este caso, $u_1(s_1, s_2) = s_1 + \frac{s_2 - s_1}{2} = \frac{s_1 + s_2}{2}$

Veamos qué ocurre si el jugador 1 se desvía a una estrategia $s_1{}^* = s_1 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ (pero manteniéndose a la izquierda de 2).

$$u_1(s_1{}^*, s_2) = s_1 + \varepsilon + \frac{s_2 - s_1 - \varepsilon}{2} = \frac{s_1 + s_2}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > u_1(s_1, s_2)$$

Por lo que tiene incentivos a desviarse, y esa estrategia no es un equilibrio de Nash. La demostración es análoga para el caso $s_2 < s_1$, por lo que de existir un equilibrio de Nash éste debe ser con estrategias iguales para ambos jugadores.

Veamos el caso en que ambos jugadores se ubican en el mismo lugar, pero ese lugar es un punto distinto del punto medio de la línea. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que dicho punto se encuentra a la izquierda del centro.

Sean $s_1, s_2 \in S$ con $s_1 = s_2 = s < 0{,}5$.

En este caso, $u_1(s_1, s_2) = 1/2$.

Si el jugador 1 se desvía a $s_1{}^* = s + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, su utilidad es de:

$$u_1(s_1{}^*, s_2) = 1 - (s + \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - s - \frac{\varepsilon}{2}$$

Para un valor de ε suficientemente pequeño, se tiene que $s + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{2}$, por lo que $u_1(s_1{}^*, s_2) > u_1(s_1, s_2)$ y el jugador 1 tiene incentivos a desviarse. Por lo tanto, una conjunto de estrategias en que ambos jugadores eligen el mismo punto, pero este punto es distinto del centro de la línea tampoco es equilibrio de Nash.

Falta por analizar el caso en que ambos jugadores eligen el centro de la línea.
Si $s_1 = s_2 = ½$, se tiene que la utilidad es:

$$u_i(s_i, s_{-i}) = 1/2$$

Si el jugador *i* se desvía en un valor ε, su utilidad es:

$$u_i(s_i + \varepsilon, s_{-i}) = \frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{2}$$

Por lo que los jugadores no tienen incentivos a desviarse y este es un equilibrio de Nash.

(ii)

En el caso de tres jugadores, el argumento para probar que las estrategias deben ser las mismas y que éstas no pueden ser en un punto distinto del centro son idénticas. Probaremos que también en el centro hay incentivos a desviarse unilateralmente.
Sea $s_1=s_2=s_3=1/2$. La utilidad de cada jugador es $u_i(s_1, s_2, s_3) = 1/3$. En caso de desviarse en un valor ε pequeño, la utilidad del jugador *i* es $u_i(s_i, s_{-i}) = \frac{1}{2} - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{3}$ por lo existen incentivos a desviarse.

Problema 2: Considere el siguiente juego en forma normal

JUGADOR 1	JUGADOR 2			
		Izquierda	Centro	Derecha
	Alto	1 , 0	1 , 2	0 , 1
	Bajo	0 , 3	0 , 1	2 , 0

Encuentre el equilibrio del juego a través de eliminación iterativa de estrategias dominadas.

Solución:

Recordemos que una estrategia s_i es estrictamente dominada por s_i' si y sólo si $\forall s_{-i} \epsilon S_{-i}\ u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$ es decir, si para cualquier estrategia de los otros jugadores, s_i' da más utilidad que s_i.
En la búsqueda de estrategias estrictamente dominadas partiremos analizando al jugador 1. Vemos que en los casos en que el jugador 2 elige Izquierda o Centro, Alto da más utilidad que Bajo, pero en caso de que el jugador 2 elija Derecha, Bajo da más utilidad. Por lo que el jugador 1 no tiene estrategias estrictamente dominadas.

Analicemos al jugador 2. Izquierda más utilidad que Centro en el caso que el jugador 1 juegue Bajo, pero en caso que juegue Alto, Centro da más utilidad que Izquierda. Por lo tanto Izquierda no domina estrictamente a Centro, ni Centro domina estrictamente a Izquierda.
Comparando Izquierda con Derecha vemos que Izquierda es mejor si el jugador 1 elije Bajo, pero Derecha es mejor si el jugador 1 elige Alto, por lo que entre estas estrategias no existe dominancia estricta.
Comparando Centro con Derecha vemos que Centro es estrictamente mejor independientemente de la estrategia elegida por el jugador 1 ($2 > 1$ y $1 > 0$), por lo que Derecha es estrictamente dominada. Podemos entonces eliminar esa posibilidad (por teorema visto en cátedra, en un equilibrio de Nash se juega una estrategia estrictamente dominada con probabilidad cero) y el juego queda:

	Izquierda	Centro
Alto	1 , 0	1 , 2
Bajo	0 , 3	0 , 1

El jugador 1 es racional y sabe que el jugador 2 es racional, por lo que sabe que no jugará Derecha. En este nuevo juego vemos que para el jugador 1 jugar Alto da siempre más utilidad que jugar Bajo, por lo que Bajo es estrictamente dominada y se elimina. El juego queda:

	Izquierda	Centro
Alto	1 , 0	1 , 2

En este juego, el jugador 1 sólo tiene una estrategia posible, y bajo esa estrategia, para el jugador 2 Centro de más utilidad que Izquierda, por lo que Izquierda es estrictamente dominada y es eliminada.
El equilibrio de Nash es, por lo tanto, (Alto, Izquierda) y da pagos (1, 2).

Problema 3: Dos adolescentes manejan sus autos en direcciones opuestas por un camino abandonado. Chocarán a menos que uno se desvíe. Si uno de los dos se desvía, obtiene una utilidad 0 y el otro se queda con el prestigio de ser valiente, que da una utilidad 10. Si los dos se desvían, ambos obtienen 0 y si ninguno se desvía, ambos mueren. Plantee este juego en forma normal y encuentre los equilibrios de Nash en estrategias puras.

<u>Solución:</u>

La forma normal es:

	ND	D
ND	-100, -100	10, 0
D	0, 10	0, 0

Para el jugador 1: Bajo la creencia de que el jugador 2 no se va a desviar, la mejor respuesta es desviarse. Bajo la creencia de que el jugador dos se va a desviar, la mejor respuesta es no desviarse.
Análogo para el jugador 2, con lo que se llega a que existen dos equilibrios de Nash:

$$NE = \{(ND, D)(D, ND)\}$$

Problema 4: Considere el siguiente juego en forma normal:

	I	C	D
A	2 , 0	1 , 1	4 , 2
M	3 , 4	1 , 2	2 , 3
B	1 , 3	0 , 2	3 , 0

(i) ¿Qué estrategias sobreviven a una eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas?
(ii) Encuentre los equilibrios de Nash en estrategias puras.
(iii) Encuentre los equilibrios de Nash en estrategias mixtas.

Solución:

(i)

Vemos que para el jugador 1, B es estrictamente dominada por A (ya que para todas las posibles estrategias de el jugador 2, A da una utilidad estrictamente mayor).
Por lo tanto, el juego queda:

	I	C	D
A	2 , 0	1 , 1	4 , 2
M	3 , 4	1 , 2	2 , 3

En este juego, para el jugador 2, C es estrictamente dominada por D. El juego queda:

	I	D
A	2 , 0	4 , 2
M	3 , 4	2 , 3

Vemos que los equilibrios en estrategias puras son $NE = \{(M, I), (A, D)\}$.

Busquemos ahora los equilibrio en estrategias mixtas: llamemos p a la probabilidad que asigna el jugador 1 a jugar A, y llamemos q a la probabilidad que asigna el jugador 2 a jugar I.
La utilidad esperada para el jugador 1 es:

$$u_1(p,q) = p\big(2q + 4(1-q)\big) + (1-p)\big(3q + 2(1-q)\big)$$

Reordenando:

$$u_1(p,q) = p(4-2q) + (1-p)(2+q)$$

El jugador 1 va a asignar todo el peso al primer paréntesis si éste es mayor que el paréntesis de la derecha, y viceversa. Si es que estos dos paréntesis son iguales el jugador va a repartir las probabilidades. Por lo tanto, su función de mejor respuesta es:

$$\begin{array}{lll} p^*(q) = 1 & \text{si} & q < {}^2/_3 \\ p^*(q) = 0 & \text{si} & q > {}^2/_3 \\ p^*(q)\epsilon(0{,}1) & \text{si} & q = {}^2/_3 \end{array}$$

Para el jugador 2:

$$u_2(p,q) = q(4-4p) + (1-q)(3-p)$$

Y la función de mejor respuesta es:

$$\begin{array}{lll} q^*(p) = 1 & \text{si} & p < {}^1/_3 \\ q^*(p) = 0 & \text{si} & p > {}^1/_3 \\ q^*(p)\epsilon(0{,}1) & \text{si} & p = {}^1/_3 \end{array}$$

Ahora, para que un par (p^*, q^*) sea efectivamente equilibrio de Nash, se debe cumplir que $p^*(q^*) = p^*$y $q^*(p^*) = q^*$.
Veamos caso a caso.
Supongamos que $p^* = 1$

Esto implica que $q^* = 0$, ya que $1 < 1/3$.

Esto implica que $p^* = 1$, lo que verifica el supuesto y demuestra las estrategias de ambos jugadores son mejor respuesta a la estrategia del otro. Por lo tanto el par de estrategias $(p^*, q^*) = (0\,,1)$ es un equilibrio de Nash.

Análogamente se demuestra que el par de estrategias $(p^*, q^*) = (1\,,0)$ también es un equilibrio de Nash. Estos dos equilibrios son los equilibrios en estrategias puras que habíamos encontrado previamente.

Veamos el caso en que $p^*\epsilon(0{,}1)$. Esto sólo se daría en el caso de que $q^* = 1/3$ y esto a su vez es mejor respuesta a $p^* = 2/3$. Por lo que el par $(p^*, q^*) = (2/3\,, 1/3)$ es equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

$$NE = \big\{(0{,}1), (1{,}0), ({}^2/_3\,, {}^1/_3\big\}$$

Problema 5: Considere que en una aldea hay I ganaderos. Cada verano cada uno de ellos lleva a pastar a su ganado al ejido cercano. Denotaremos n_i el número de animales que el aldeano i posee. El costo de comprar un animal es constante e igual a c. El valor de venta cuando en el ejido hay n animales es de $v(N)$ por animal, donde N es el total de animales. Además se sabe que $v(\cdot)$ es positiva, estrictamente decreciente y estrictamente cóncava.

a) Encuentre e interprete el número óptimo de vacas que tiene cada ganadero. *(Hint: usted está buscando el equilibrio de Nash).*
b) Encuentre el número óptimo de vacas que tendría un planificador social benevolente.
c) Explique en qué caso habrá un mayor número de vacas. Demuéstrelo formalmente.
d) En 1974 el público en general tuvo una ilustración gráfica del fenómeno estudiado en este problema en una serie de fotos de la Tierra tomadas desde un satélite. Las fotos del norte de África mostraban una mancha irregular, de 1.000 kilómetros cuadrados de extensión. Las investigaciones a nivel de suelo revelaron un área cercada dentro de la cual había abundancia de hierba. Fuera, la cubierta del suelo había sido devastada. Obviamente el área cercada era propiedad privada y fuera de ella la tierra no tenía dueño. Una era usada por agricultores (tierra privada) y la otra por nómades. ¿Cómo explica la teoría de juegos este fenómeno?

<u>Solución:</u>

La solución se encuentra en el ejercicio 25 de la guía de ejercicios del semestre que está en u-cursos.