Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: J. Correa, R. Epstein
Aux: S. Astroza, J. Gacitúa, R. Lagos, Ch. Thraves

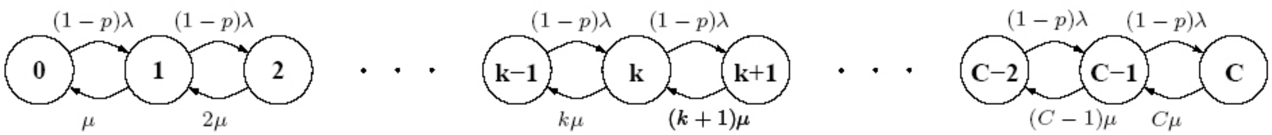
Auxiliar 18: Markov en Tiempo Continuo

Martes 9 de Junio de 2009

Problema 1

1. Una cadena que modela el estado de ocupación de las camas se puede definir utilizando estados $0, 1, \cdots, C$ que representan el número de camas ocupadas.

   La cadena resultante se muestra en la figura:



2. La cadena admite probabilidades estacionarias porque es finita e irreductible.

   Definamos $\rho = \frac{(1-p)\lambda}{\mu}$. Con esta notación, las probabilidades estacionarias cumplen las relaciones

$$\pi_k = \frac{\rho^k}{k!}\pi_0$$

   Por lo tanto,

$$\pi_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=0}^{C} \frac{\rho^k}{k!}}$$

   La suma en el denomiandor no tiene expresión cerrada conocida.

3. La probabilidad que se termine de atender al último paciente de urgencia que llegó, antes que llegue otro paciente de urgencia es igual a

$$\frac{\mu}{(1-p)\lambda + \mu}$$

4. *a*) En promedio, por dia, son derivados al otro hospital de la zona $(1-p)\lambda\pi_C$ pacientes.

   b) En promedio hay $\displaystyle\sum_{k=0}^{C} k\pi_k = \sum_{k=1}^{C} k\pi_k$ camas ocupadas.

Problema 2

1. El modelo es un proceso de nacimiento y muerte con conjunto de estados $\{0, 1, 2, \ldots, L\}$. Las tasas de transición son:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= (E - i)\lambda \\ \mu_i &= i\mu\,. \end{aligned}$$

Este sistema de espera puede ser representado, en la notación de Kendall como $M/M/L/L/E$: un sistema con llegadas markovianas, con tiempos de atención exponenciales, L servidores (las líneas), capacidad L y llegadas originadas en una población de tamaño E.

Este sistema siempre tiene régimen estacionario ya que es un proceso de nacimiento y muerte (por lo tanto, una cadena irreducible) finito.

2. *a*) Fracción del tiempo promedio que pasa una línea desocupada: $\sum_{i=0}^{L} \frac{L-i}{L}\pi_i$.

   b) Llamadas no realizadas en una hora: $(E-L)\lambda\pi_L$.

   c) Se debe encontrar L $(0 \leq L \leq E)$ que minimice el costo esperado por hora:

$$C \cdot L + K(E-L)\lambda\pi_L + \left(\mu \sum_{i=1}^{L} i\pi_i\right) Y$$

   o

$$C \cdot L + K(E-L)\lambda\pi_L + \left(\lambda \sum_{i=0}^{L-1} (E-i)\pi_i\right) Y \, .$$

3. En el caso que $L = E$, se tiene que $\lambda_i = (E-i)\lambda$ y $\mu_{i+1} = (i+1)\mu$, para $i \in \{0, 1, \ldots, E-1\}$. Entonces, para $k = 1, 2, \ldots, E$,

$$\pi_k = \pi_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(E-i)\lambda}{(i+1)\mu} = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{E(E-1)\cdots(E-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = \binom{E}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0 \, .$$

   Por lo tanto,

$$1 = \pi_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{E} \binom{E}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right] = \left[\sum_{k=0}^{E} \binom{E}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right] \pi_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^E \pi_0 = \left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^E \pi_0$$

   de donde concluimos que

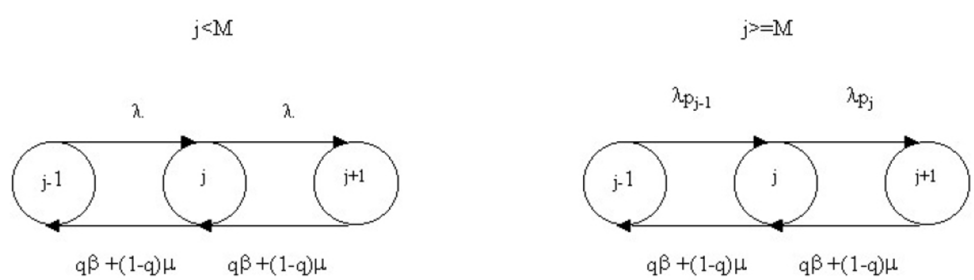
$$\pi_0 = \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^E \, .$$

4. Los estados siguen siendo los mismos.
   Las tasas de nacimiento cambian a $\lambda_i = (E-i)\lambda + \delta$. Las tasas de muerte siguen siendo las mismas.
   El sistema cambia a un $M/M/L/L$; las llamadas se originan a partir de una población *infinita*.
   La cadena sigue siendo finita e irreducible, por lo que admite probabilidades estacionarias.

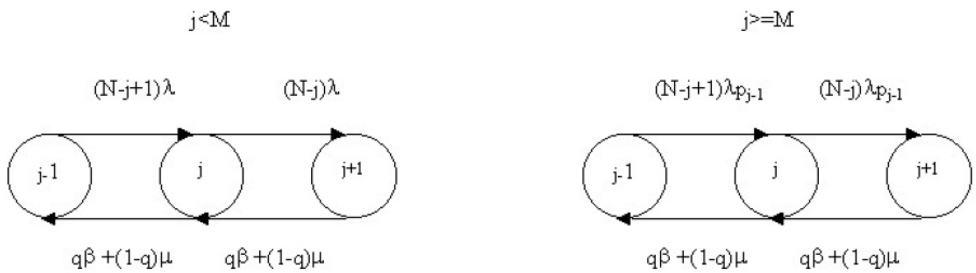
Problema 3

1. $p_j = 1 - (1-p)^j$

2. Existen 2 opciones de respuesta para esta pregunta (dos interpretaciones sobre la tasa de llegada).



La otra alternativa:



Para ambas alternativas existen probabilidades estacionarias ya que la cadena es finita. (Estados de 0 a N)

3. *a*) Tasa efectiva de entrada
   $Caso1 : \lambda_E = \lambda \sum_{j=0}^{M-1} \Pi_j \, + \sum_{j=M}^{N} \lambda p_j \Pi_j$
   $Caso2 : \lambda_E = \lambda \sum_{j=0}^{M-1} \Pi_j \, + \sum_{j=M}^{N} \lambda p_j \Pi_j$
   b) Tiempo esperado en el sistema
   $W = \frac{L}{\lambda_E}$ Donde $L = \sum_{j=0}^{N} j\Pi_j$
   c) Costo esperado para la empresa
   $CE = WK + \sum_{j=0}^{N} \Pi_j C_j$

4. Bajo esta nueva situación, la tasa de entrada ya no depende de la probabilidad de colarse, pues el que llega siempre se coloca en la fila. Esto quiere decir que la tasa de llegada es igual a la de entrada. La tasa de muerte para cada estado es simplemente el doble para cada estado, a excepción de pasar del estado donde hay una sola persona a ninguna, la cual sigue siendo $q\beta + (1-q)\mu$. Si N tiende infinito la cadena se transforma en una M/M/2

   Las probabilidades estacionarias son las siguientes:

   $\Pi_j = 2\rho^j \pi_0$ con $\rho = \frac{\lambda}{2(q\beta+(1-q)\mu)}$ y $\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho}$

5. *a*) Tasa efectiva de entrada a la cola
   Como se dijo anteriormente, es igual a la de llegada que es λ
   b) Número de personas en el sistema

$$L = \frac{2 \cdot \rho}{1 - \rho^2}$$

   c) Tiempo esperado en la cola sin ser atendido
   Esto es $W_{sistema} - W_{atencion} = \frac{L}{\lambda} - \frac{1}{q\beta+(1-q)\mu}$