



Auxiliar 20: Teoría de Colas

Martes 16 de Junio de 2009

Problema 1

El Servicio de Urgencias de un hospital cuenta con C camas para recibir los pacientes que necesitan atención. Este Servicio de Urgencias recibe pacientes de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ [pacientes/día]. Se sabe que una fracción p de estos pacientes no corresponden a urgencias y son derivados inmediatamente al Servicio de Medicina General.

Los pacientes que corresponden a urgencias son tratados de la siguiente manera: si un paciente llega y todas las camas están ocupadas es derivado inmediatamente al Servicio de Urgencias del otro hospital de la zona. Cuando un paciente llega, si hay una cama disponible, comienza a ser atendido inmediatamente, ocupando una cama. El tiempo de permanencia en el Servicio de Urgencias de un paciente se puede modelar como una variable aleatoria exponencial de media $1/\mu$ [días]. Luego de este tiempo el paciente es dado de alta y se retira del Servicio. Cuando esto sucede, la cama que estaba ocupando comienza a estar disponible inmediatamente.

1. Modele el estado de ocupación de las camas del Servicio de Urgencias descrito como una cadena de Markov de tiempo continuo. Especifique claramente los estados y las tasas de transición.
2. Justifique por qué la cadena del punto anterior admite probabilidades estacionarias y calcúlelas en función de los parámetros del problema.
3. Calcule, en función de los parámetros del problema, la probabilidad que se termine de atender al último paciente de urgencia que llegó, antes que llegue otro paciente de urgencia.
4. Considere conocidas las probabilidades estacionarias de la cadena del punto 1. De expresiones, en función de los parámetros del problema, para las siguientes cantidades en el largo plazo:
 - a) Cantidad de pacientes que corresponden a urgencias que son derivados al otro hospital de la zona por día, en promedio.
 - b) Número de camas ocupadas, en promedio.

Problema 2

Una empresa está considerando la instalación de una central telefónica para atender sus necesidades de llamadas. Se evalúa instalar una central con L líneas, que puedan ser usadas simultáneamente, para atender a los E empleados de la empresa. Se considera que un empleado no realiza dos llamadas al mismo tiempo por lo que la cantidad de líneas a contratar es menor o igual al número de empleados, es decir, $L \leq E$.

Se sabe que cada empleado que no esté usando el teléfono intentará hacer una llamada dentro de un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\lambda$ [horas]. Si en ese instante todas las líneas están ocupadas, el empleado desiste de realizar la llamada e intentará hacerla nuevamente luego de un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\lambda$ [horas]. En caso de conseguir una línea desocupada realiza la llamada, la cual dura un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu$ [horas].

1. Modele el número de líneas en uso como un proceso de nacimiento y muerte. Especifique claramente los estados posibles y las tasas de transición. Utilizando la notación de Kendall, indique de qué tipo de sistema de espera se trata. Indique la condición para la existencia de régimen estacionario.
2. Suponga que el sistema está operando en régimen estacionario y considere conocidas las probabilidades estacionarias de la cadena del punto anterior. Con estos antecedentes, responda las siguientes preguntas:
 - a) En promedio, ¿cuál es la fracción del tiempo que una línea cualquiera se encuentra desocupada?
 - b) En promedio, ¿cuántas llamadas no se pueden realizar, en el lapso de una hora, porque todas las líneas se encuentran ocupadas?

- c) Para analizar el costo por hora que tendrá la central para la empresa se considera que: por cada línea contratada se debe pagar un costo fijo de \$ C por hora; por las llamadas realizadas se deberá pagar un costo de \$ Y por hora de duración y por cada llamada que no se pueda realizar se incurrirá en un costo interno de valor \$ K .

Plantee un problema de optimización que le permita calcular el número de líneas a contratar de modo de minimizar el costo esperado por hora del sistema de telefonía.

3. Calcule las probabilidades estacionarias para la cadena de la parte 1 para el caso particular $L = E$.
4. Suponga que ahora se está evaluando usar la central telefónica tanto para realizar llamadas desde la empresa como para recibirlas. Es decir, las L líneas de la central, además de ser usadas para llamadas realizadas por los empleados, serán utilizadas para recibir las llamadas “entrantes” de los clientes a la empresa. Estas llamadas llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa δ [llamadas/hora]. Si hay una línea disponible, la llamada es atendida por uno de los empleados que en ese instante no esté hablando por teléfono. En el caso que todas las líneas estén en uso, la central da la señal de ocupado y la llamada se pierde. Las llamadas entrantes que son atendidas tienen una duración exponencialmente distribuida con media $1/\mu$ [horas]¹.
- ¿Cómo cambian las respuestas de la parte 1 bajo esta nueva situación?

Problema 3

Debido a la gran expectativa que genera la final del fútbol chileno entre albos y azules, se han vendido las N entradas disponibles para dicho evento a través de la empresa Ticket Master. Por motivos de seguridad, el ingreso al estadio se hará por una única entrada, en donde una persona corta los tickets en un tiempo exponencialmente distribuido de tasa μ . Con probabilidad q revisará al espectador para evitar la entrada de artículos peligrosos al evento. Esta revisión, incluido el tiempo en cortar el ticket, toma un tiempo exponencial de media $\frac{1}{\beta}$. La llegada de cada hincha se puede modelar según un proceso de Poisson de tasa λ y su manera de entrar a la cola es la siguiente:

Si hay menos de M personas esperando por entrar, la persona se pondrá al final de la cola. Pero si hay M o más personas, el hincha se desesperará y buscará un amigo para colarse. La búsqueda de éste comienza desde el origen. Cada persona en la fila es amigo con probabilidad p . Si ninguno de los que está esperando lo es, la persona se retira indignada y renuncia a entrar. Considere que el tiempo para buscar a un amigo es despreciable y que existe un costo para la empresa de C_j si hay j personas en la fila. Por otra parte, hay un costo asociado al tiempo promedio que demora una persona en ingresar al estadio (dado que se mete en la fila) de K por unidad de tiempo

1. Calcule la probabilidad de que una persona se pueda colar al llegar, cuando el número de personas en la cola es igual a j . ($j \geq M$).
2. Modele el número de personas en la fila como un proceso de Markov, indicando las transiciones para estados genéricos. Indique bajo que condiciones existen probabilidades estacionarias.
3. Calcular los siguientes datos, para el modelo en el largo plazo. Asuma conocidas las probabilidades estacionarias:
 - a) Tasa efectiva de entrada
 - b) Tiempo esperado en el sistema
 - c) Costo esperado para la empresa

El gurú del fútbol indicó que modelar el ingreso de esta forma estadios es poco realista, pues en Chile la gente siempre trata de colarse al llegar, no importando el número de personas en la fila. Además generalmente hay dos personas revisando los tickets.

4. Modele nuevamente el número de personas en la fila para ingresar al estadio, considerando las observaciones del gurú y suponiendo que el hincha nunca se irá sin ingresar. Indique las transiciones para estados genéricos y calcule las probabilidades estacionarias cuando N tiende a infinito.
5. Usando lo anterior calcule en el largo plazo
 - a) Tasa efectiva de entrada a la cola
 - b) Número de personas en el sistema
 - c) Tiempo esperado en la cola sin ser atendido

¹Es decir, la duración de los dos tipos de llamadas que usarán la central, tienen la misma distribución