Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: J. Correa, R. Epstein
Aux: S. Astroza, J. Gacitúa, R. Lagos, Ch. Thraves

Auxiliar 3: Árboles de Decisión

Martes 31 de Marzo de 2009

Pregunta 1

1. El árbol de decisión queda como indica la figura:

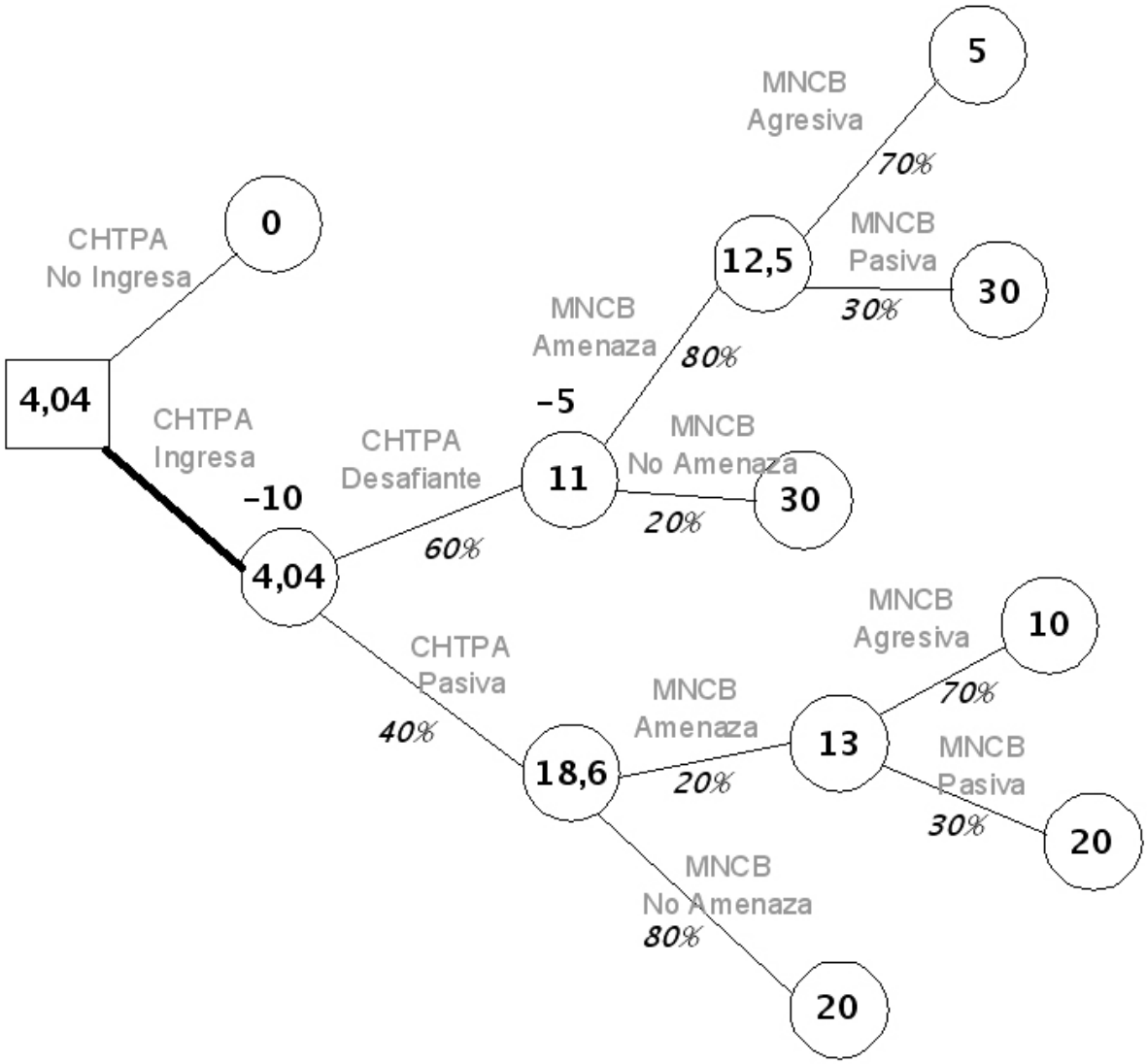

Figura 1: Arbol problema 1.1

Las probabilidades que no se especifican en el enunciado (la probabilidad que MonoCobre amenace dado que ChileExplota entra desafiante) fueron calculadas de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}(CHTPA\ des.\ |\ MNCB\ am.) = 85,7\,\%$$

$$\mathcal{P}(MNCB\ am.\ |\ CHTPA\ des.) = \frac{\mathcal{P}(CHTPA\ des.\ |\ MNCB\ am.) \cdot \mathcal{P}(MNCB\ am.)}{\mathcal{P}(CHTPA\ des.)}$$

$$= \frac{0,857 \cdot \mathcal{P}(MNCB\ \ am.)}{0,6}$$

Por otro lado:

$$\mathcal{P}(MNCBam.) = \mathcal{P}(MNCBam.|CHTPAdes.) \cdot \mathcal{P}(CHTPAdes.) + \mathcal{P}(MNCBam.|CHTPApas.) \cdot \mathcal{P}(CHTPApas.)$$

$$= 0,857 \cdot \mathcal{P}(MNCB\ \ am.) + 0,2 \cdot 0,4$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P}(MNCB\ \ am.) = 0,56$$

Por último

$$\mathcal{P}(MNCB\ \ am.\ |\ CHTPA\ \ des.) = \frac{0,857 \cdot 0,56}{0,6} = 0,8$$

La empresa ganaría $4,04$ millones por ingresar.

2. El nuevo arbol sería:

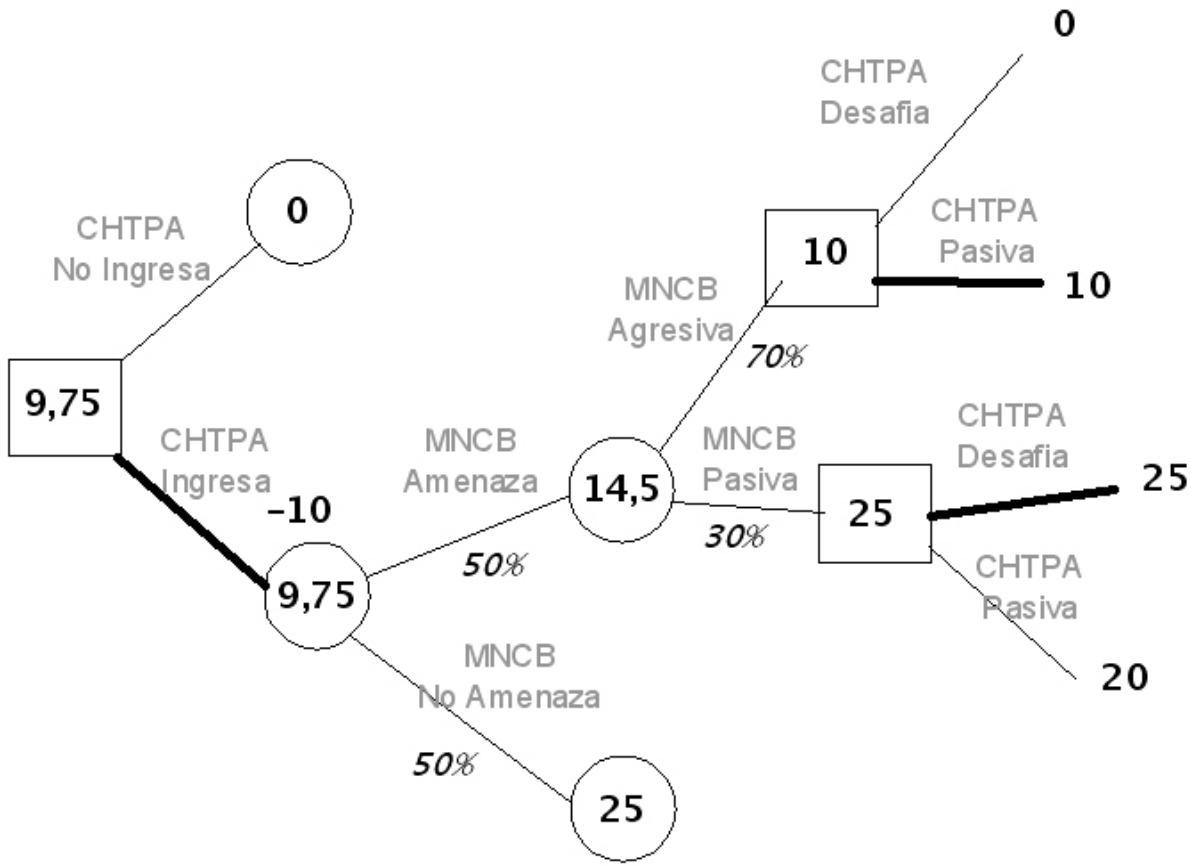

Figura 2: Arbol problema 1.2

Y el valor de la información perfecta es: $9,75 - 4,04 = 5,71$ millones de pesos.

Pregunta 2

1. La siguiente nomenclatura es empleada para cada decisión del árbol:

P	:	realizar piscinazo
M	:	ir por mano a mano
CP	:	árbitro cobra penal
NP	:	árbitro no cobra penal
PI	:	Buenanote tira penal a la izquierda
PD	:	Buenanote tira penal a la derecha
API	:	Arquero se tira penal a la izquierda
APD	:	Arquero se tira penal a la derecha
PM	:	Buenanote no elude a Mac y no puede ir por mano a mano
GM	:	Buenanote elude a Mac y va por mano a mano
TI	:	Buenanote tira a la izquierda en mano a mano
TD	:	Buenanote tira a la derecha en mano a mano
ATI	:	Arquero se tira en mano a mano a la izquierda
ATD	:	Arquero se tira en mano a mano a la derecha

El problema se puede modelar con el árbol de la siguiente figura (los pagos están expresados en US $).

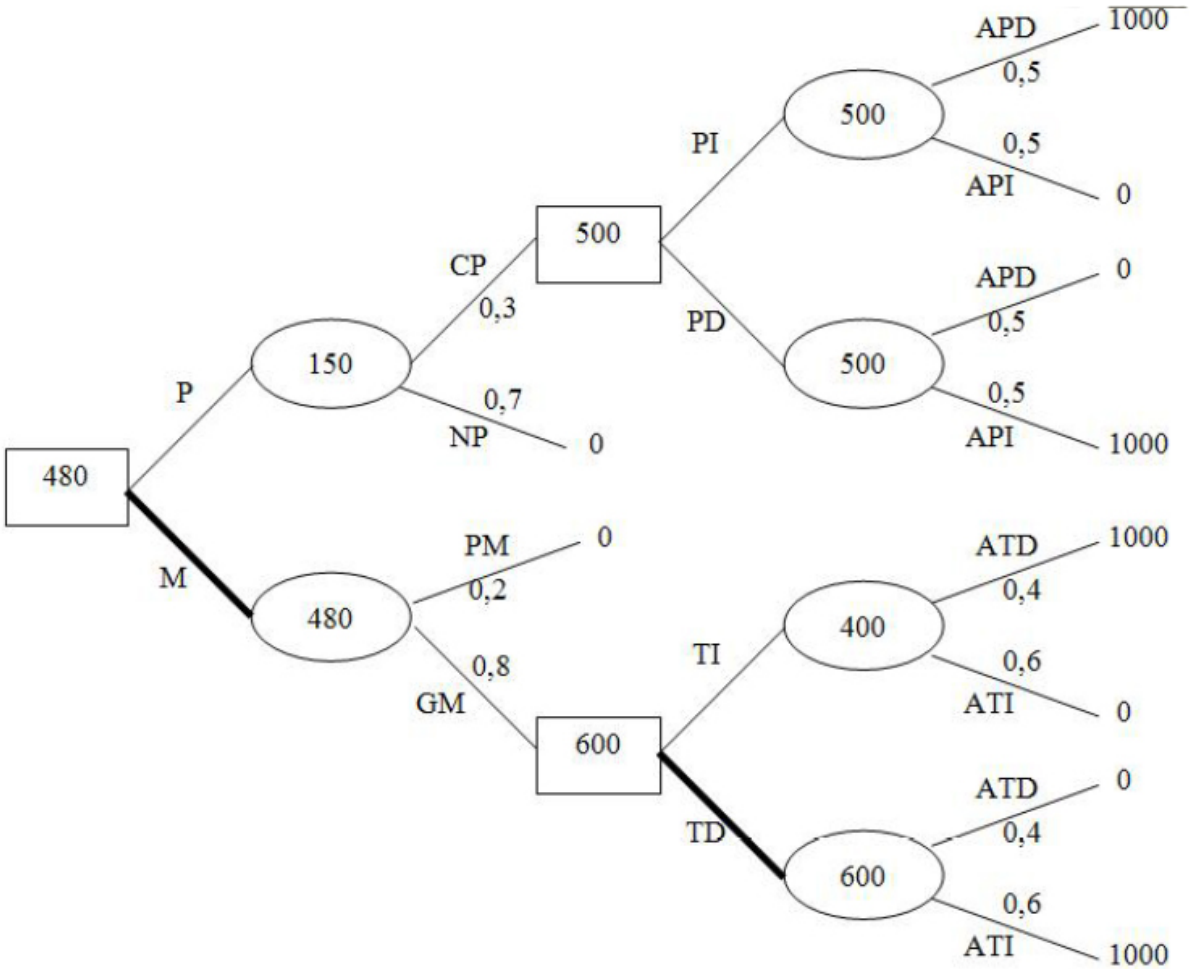

Figura 3: Arbol problema 2.1

Luego Buenanote debe intentar eludir a Mac y rematar hacia la derecha.

2. Ahora debemos comparar los retornos esperados de la alternativa de recibir los consejos del Gurú y ver que decisión óptima tomar. Para esto, usamos las siguientes consideraciones de nomenclatura:

SG	:	no son contratados los servicios del Gurú
CG	:	son contratados los servicios del Gurú
GPI	:	Gurú predice atajada de penal a la izquierda
GPD	:	Gurú predice atajada de penal a la derecha
GTI	:	Gurú predice que arquero se tira en mano a mano a la izquierda
GTD	:	Gurú predice que arquero se tira en mano a mano a la derecha

Debido a que el Gurú predice el lado que se tirará el arquero sin importar si es penal o mano a mano, se tendrán las siguientes igualdades de probabilidades condicionales:

$$\mathcal{P}(GPD \mid APD) = \mathcal{P}(GTD \mid ATD) = 0,8$$

$$\mathcal{P}(GPI \mid API) = \mathcal{P}(GTI \mid ATI) = 1$$

Inicialmente analizaremos el caso de las probabilidades de los tiros penales y luego extenderemos para el caso del mano a mano.

Para realizar la estimación de este árbol se requiere saber las probabilidades condicionadas inversamente de $\mathcal{P}(GPD \mid APD)$ y $\mathcal{P}(GPI \mid API)$. Para ello se puede ver que:

$$\mathcal{P}(GPD \mid APD) \;=\; 0,8 \;=\; 1 - \mathcal{P}(GPI \mid APD)$$

$$\Rightarrow\; \mathcal{P}(GPI \mid APD) \;=\; 0,2$$

$$\mathcal{P}(GPI \mid API) \;=\; 1 \;=\; 1 - \mathcal{P}(GPD \mid API)$$

$$\Rightarrow\; \mathcal{P}(GPD \mid API) \;=\; 0$$

Así utilizando probabilidades totales se tiene que:

$$\mathcal{P}(GPD) \;=\; \mathcal{P}(GPD \mid APD)\cdot\mathcal{P}(APD) + \mathcal{P}(GPD \mid API)\cdot\mathcal{P}(API) \;=\; 0,8\cdot 0,5 + 0\cdot 0,5 \;=\; 0,4$$

$$\Rightarrow\; \mathcal{P}(GPI) \;=\; 1 - \mathcal{P}(GPD) \;=\; 0,6$$

Ahora realizando Bayes se obtienen las probabilidades deseadas:

$$\mathcal{P}(APD \mid GPD) \;=\; \frac{\mathcal{P}(GPD \mid APD)\cdot\mathcal{P}(APD)}{\mathcal{P}(GPD)} \;=\; \frac{0,8\cdot 0,5}{0,4} \;=\; 1$$

$$\Rightarrow\; \mathcal{P}(API \mid GPD) \;=\; 1 - \mathcal{P}(APD \mid GPD) \;=\; 0$$

$$\mathcal{P}(API \mid GPI) \;=\; \frac{\mathcal{P}(GPI \mid API)\cdot\mathcal{P}(API)}{\mathcal{P}(GPI)} \;=\; \frac{1\cdot 0,5}{0,6} \;=\; 0,833$$

$$\Rightarrow\; \mathcal{P}(APD \mid GPI) \;=\; 1 - \mathcal{P}(API \mid GPI) \;=\; 0,167$$

Para el caso de los mano a mano se realiza el mismo procedimiento. Primero probabilidades totales para obtener:

$$\mathcal{P}(GTD) \;=\; 0,32$$

$$\mathcal{P}(GTI) \;=\; 0,68$$

Y luego empleando Bayes:

$$\mathcal{P}(ATD \mid GTD) \;=\; 1$$

$$\Rightarrow\; \mathcal{P}(ATI \mid GTD) \;=\; 0$$

$$\mathcal{P}(ATI \mid GTI) \;=\; 0,88$$

$$\Rightarrow\; \mathcal{P}(ATD \mid GTI) \;=\; 0,12$$

Luego de obtenidas estas probabilidades el árbol resultante se muestra en la siguiente figura:

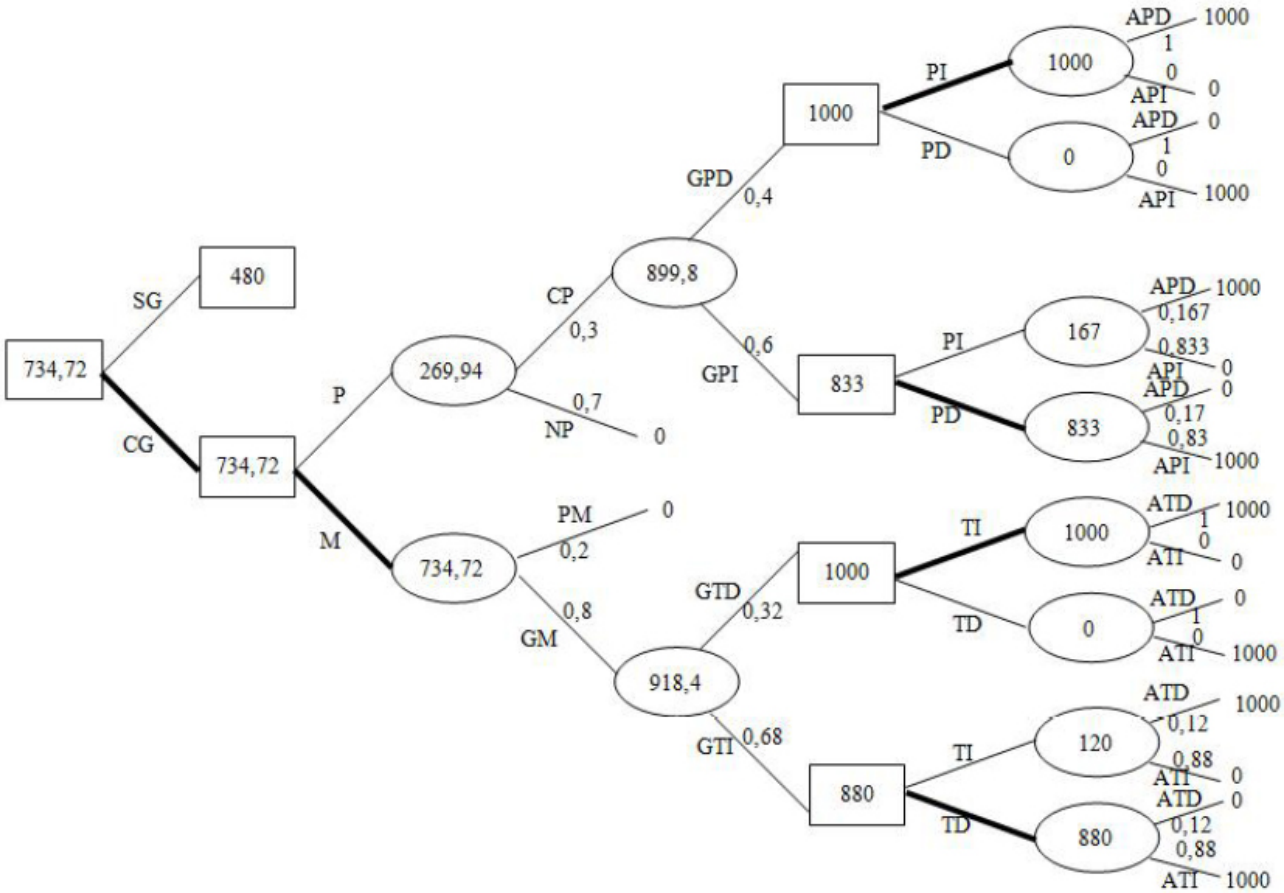

Figura 4: Arbol problema 2.2

Como se observa en el árbol de la figura, al equipo le conviene contratar al Gurú y éste puede cobrar hasta $US\$734,72 - US\$480 = US\$254,72$ por utilizar sus habilidades predictivas en beneficio del equipo de Buenanote.

Pregunta 3

1. De la figura 5 se ve que el precio máximo es $v = 35$.

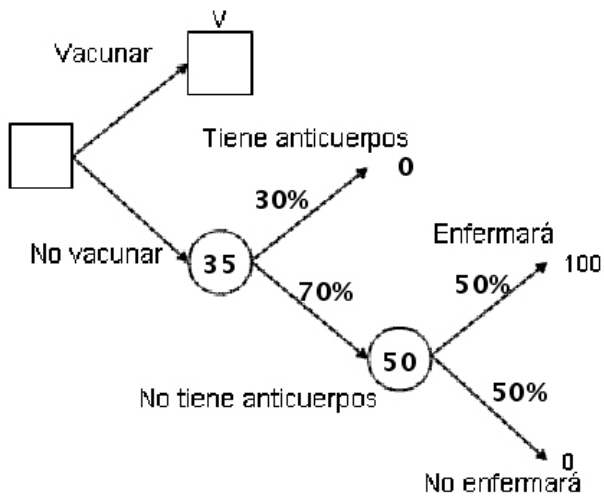

Figura 5: Arbol problema 3.1

2. Sean:

A	=	Persona con anticuerpos.
S	=	Persona sin anticuerpos.
TA	=	Test dice persona tiene anticuerpos.
TS	=	Test dice persona no tiene anticuerpos.

Entonces lo que se nos entrega en el enunciado es:

$$\begin{aligned} P[A] &= 0{,}3 & P[S] &= 0{,}7 \\ P[TS|A] &= 0{,}1 & P[TA|A] &= 0{,}9 \\ P[TS|S] &= 1-p & P[TA|S] &= p \end{aligned}$$

Entonces, utilizando probabilidades totales se puede ver que:

$$P[TA] = P[TA|A] \cdot P[A] + P[TA|S] \cdot P[S] = 0{,}7p + 0{,}27 = 1 - P[TS]$$

Por otro lado tendremos que:

$$P[S|TS] = \frac{P[TS|S] \cdot P[S]}{P[TS]} = \frac{0{,}7 - 0{,}7p}{0{,}73 - 0{,}7p} = 1 - P[A|TS]$$

$$P[S|TA] = \frac{P[TA|S] \cdot P[S]}{P[TS]} = \frac{0{,}7p}{0{,}27 + 0{,}7p} = 1 - P[A|TA]$$

Si consideramos:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{35p}{0{,}27 + 0{,}7p} < 40 \Rightarrow p < \frac{10{,}8}{7} \\ \beta &= \frac{35 - 35p}{0{,}73 - 0{,}7p} > 40 \Rightarrow p < 0{,}829 \\ \delta &= 35p + (0{,}73 - 0{,}7p) \cdot 40 < 35 \Rightarrow p < 0{,}17 \end{aligned}$$

El árbol resultante se ve como el de la figura 6.

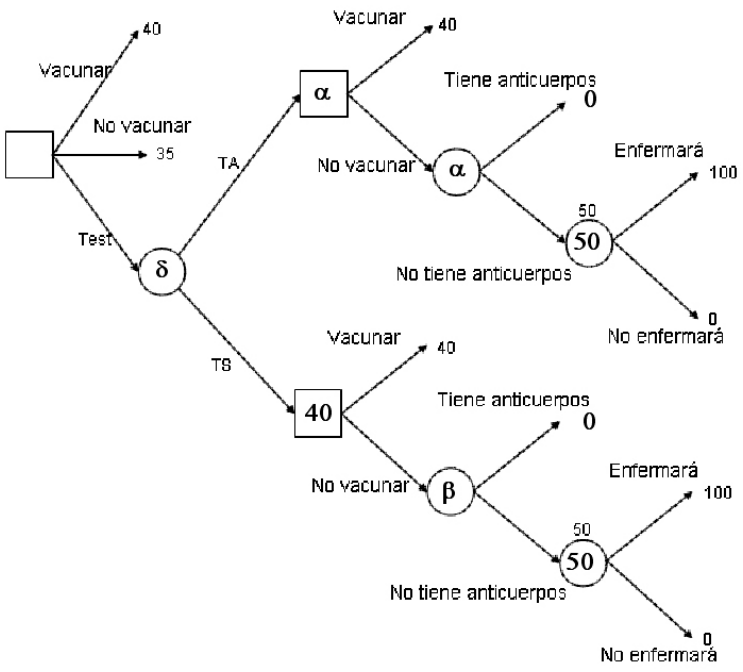

Figura 6: Arbol problema 3.2

3. Propuesto