

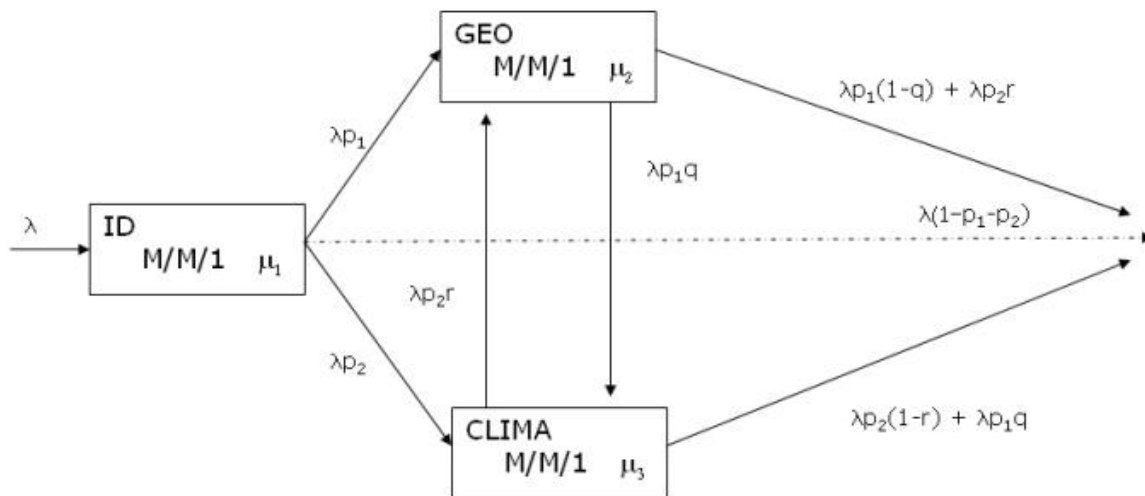


Auxiliar 23: Redes de Colas

Miércoles 24 de Junio de 2009

Problema 1

1. El sistema de colas es el que se presenta a continuación:



De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

Sistema	Tasa Efectiva	Valor
ID	λ_{ID}	λ
GEO	λ_{GEO}	$\lambda \cdot (p_1 + p_2 \cdot r)$
CLIMA	λ_{CLIMA}	$\lambda \cdot (p_1 \cdot q + p_2)$

IMPORTANTE: Para el cálculo anterior se consideró que nadie hace la misma consulta dos veces.

Las condiciones de estado estacionario son las siguientes:

Sistema	Condición
ID	$\lambda_{ID} \leq \mu_1$
GEO	$\lambda_{GEO} \leq \mu_2$
CLIMA	$\lambda_{CLIMA} \leq \mu_3$

2. Calculamos el número esperado de personas en el sistema como la suma del número esperado de personas en cada subsistema. Ocupando los resultados de la M/M/1:

$$\begin{aligned}
 L_{TOTAL} &= L_{ID} + L_{GEO} + L_{CLIMA} \\
 &= \frac{\lambda_{ID}}{\mu_1 - \lambda_{ID}} + \frac{\lambda_{GEO}}{\mu_2 - \lambda_{GEO}} + \frac{\lambda_{CLIMA}}{\mu_3 - \lambda_{CLIMA}}
 \end{aligned}$$

3. Para esto ocupamos Little:

$$W_{TOTAL} = \frac{L_{TOTAL}}{\lambda}$$

4. El costo por unidad de tiempo de la espera será el siguiente:

$$C_{ESPERA} = L_{TOTAL} \cdot C_W$$

El costo de atención será: (NOTA: En una M/M/1, $\pi_0 = 1 - \rho$)

$$\begin{aligned} C_{ATENCION} &= (1 - \pi_0^{ID}) \cdot C_1(\mu_1) + (1 - \pi_0^{GEO}) \cdot C_2(\mu_2) + (1 - \pi_0^{CLIMA}) \cdot C_3(\mu_3) \\ &= \frac{\lambda_{ID}}{\mu_1} \cdot C_1(\mu_1) + \frac{\lambda_{GEO}}{\mu_2} \cdot C_2(\mu_2) + \frac{\lambda_{CLIMA}}{\mu_3} \cdot C_3(\mu_3) \end{aligned}$$

Claramente tanto el costo de espera como el costo de atención presentan dependencias respecto a las tasas de atención dado que ellas condicionan los valores de las probabilidades estacionarias. De esta forma el problema de optimización a resolver es el siguiente:

$$P = \min_{u_i > 0} \{C_{ESPERA}(\mu_1, \mu_2, \mu_3) + C_{ATENCION}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)\}$$

Problema 2

1. Plantee las condiciones para que exista estado estacionario. (0,5 puntos)

Definimos las tasas efectivas de cada subistema,

λ_1	Ejecutivo Jr.
λ_2	Ejecutivo Sr.
λ_3	Rechazo
λ_4	Aceptación

Para cada subistema deben estar definidas las probabilidades estacionarias. Se debe cumplir $\lambda_i < \mu_i$, donde

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha \\ \lambda_2 &= \beta + p\alpha \\ \lambda_3 &= (1 - q)\beta + (1 - pq)\alpha \\ \lambda_4 &= (1 + (1 - r)pq)\alpha + (1 + (1 - r)q)\beta \end{aligned}$$

2. Las salidas del subistema **Rechazo** con probabilidad r representan rechazos; las salidas del subistema **Aceptación** representan aceptaciones. Calcule la fracción de créditos rechazados y aceptados. (1 punto)
Se calcula directamente con las tasas efectivas de salida. Sea f_r fracción de rechazos y f_a fracción de aceptaciones.

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{r \cdot \lambda_3}{\alpha + \beta} \\ f_a &= \frac{\lambda_4}{\alpha + \beta} = 1 - f_r \end{aligned}$$

3. Calcule el número promedio de solicitudes en el sistema. (1 punto) El número promedio de solicitudes en el sistema, L se calcula como

$$L = \sum_{i=1}^4 L_i$$

Donde

$$L_i = \frac{\rho_i}{1-\rho_i} \quad \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu} \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$$

4. ¿Cuánto tarda un cliente cualquiera en conocer la resolución de su solicitud de crédito?(0,5 puntos)
Ocupando Little, la respuesta es

$$W = \frac{L}{\alpha + \beta}$$

5. En estado estacionario, cada solicitud dentro del sistema cuesta S . Aumentar la tasa μ por sobre μ_0 cuesta M por unidad. Encuentre el μ óptimo para minimizar el costo promedio en estado estacionario.(1 punto)

Se define la a función de costos promedio en el largo plazo como

$$C(\mu) = S \cdot \sum_{i=1}^4 L_i(\mu) + M \cdot (\mu - \mu_0)$$

El problema a resolver es,

$$\begin{aligned} & \min C(\mu) \\ & \text{s.a.} \\ & \mu > \max \{\lambda_i\}_{i=1,2,3,4} \end{aligned}$$

6. a) Calcule el tiempo promedio que tarda una solicitud de tipo β en salir del sistema. (1 punto)
Una solicitud de tipo β saldrá en promedio en

$$W_\beta = W_2 + (1 - q)W_3 + (1 - r(1 - q))W_4$$

$$\text{Donde } W_i = \frac{L_i}{\lambda_i}$$

- b) Calcule el número promedio de solicitudes tipo β que hay en el sistema. (1 punto)
Ocupamos Little sobre las solicitudes tipo β ,

$$L_\beta = \beta \cdot W_\beta$$

Problema 3

Sea $\{X(t), t = 1, \dots\}$ cadena de markov en tiempo discreto que representa el estado de la máquina. El conjunto de estados será $E = \{N, Re, Ro\}$ y el conjunto de decisiones será $A_i = \{L, H\} \quad \forall i \in E$.

Las matrices de transición para la política s , $M(s)$, son las siguientes:

$$\begin{array}{cc} \text{Para } a_i = H \quad \forall i \in E & \text{Para } a_i = L \quad \forall i \in E \\ \left[\begin{array}{ccc} 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{array} \right] \end{array}$$

Los beneficios esperados por estado serán:

$$\begin{aligned}
 \hat{r}_N(H) &= 200 - 0,8 \cdot 50 = 160 \\
 \hat{r}_{Re}(H) &= 0 \\
 \hat{r}_{Ro}(H) &= 50 - 0,6 \cdot 50 = 20 \\
 \hat{r}_N(L) &= 50 - 0,6 \cdot 50 = 20 \\
 \hat{r}_{Re}(L) &= 0 \\
 \hat{r}_{Ro}(L) &= 20
 \end{aligned}$$

1. Sea $V_i(k)$ el beneficio esperado óptimo a acumular, partiendo en estado i y faltando k períodos. Buscamos resolver $V_i(2) \forall i \in E$. Tenemos como dato

$$V(0) = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Además,

$$V_i(k) = \max_{a \in A_i} \left\{ \hat{r}_i(a) + \sum_{j \in E} p_{ij}(a) \cdot V_j(k-1) \right\}$$

Empezamos a calcular entonces,

$$\begin{aligned}
 V_1(N) &= \max \{20 + (0,4 \cdot 300 + 0,6 \cdot 0); 160 + (0,2 \cdot 300 + 0,8 \cdot 0)\} = 220 \Rightarrow a_1(N) = H \\
 V_1(Re) &= \max \{0 + (0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 100); 0 + (0,5 \cdot 0 + 0,5 \cdot 100)\} = 50 \Rightarrow a_1(Re) = H \text{ ó } L \\
 V_1(Ro) &= \max \{20 + (0,5 \cdot 300 + 0,5 \cdot 100); 20 + (0,4 \cdot 300 + 0,6 \cdot 0)\} = 220 \Rightarrow a_1(Ro) = L \\
 \\
 V_2(N) &= \max \{20 + (0,4 \cdot 220 + 0,6 \cdot 50); 160 + (0,2 \cdot 220 + 0,8 \cdot 50)\} = 244 \Rightarrow a_2(N) = H
 \end{aligned}$$

Queda propuesto calcular $V_2(Re)$ y $V_2(Ro)$.

2. Estamos frente a un horizonte que consideraremos infinito. Para ello ocuparemos el *algoritmo de Howard*. Sea S el conjunto de políticas posibles.

- a) Seleccionar política $\bar{s} \in S$.
- b) Calcular $W(\bar{s})$.
- c) Si se verifica para cada fila

$$\hat{r}(\bar{s}) + P(\bar{s}) \cdot W(\bar{s}) \geq \hat{r}(s) + P(s) \cdot W(\bar{s}) \quad \forall s \in S$$

entonces \bar{s} es política óptima. Si no se cumple,

- d) Encontrar \hat{s} tal que

$$\hat{r}(\bar{s}) + P(\bar{s}) \cdot W(\bar{s}) < \hat{r}(\hat{s}) + P(\hat{s}) \cdot W(\bar{s})$$

- e) Reemplazar $\bar{s} \rightarrow \hat{s}$ y volver a 2.

Iteración 1 Tomamos $\bar{s} = \begin{pmatrix} H \\ H \\ H \end{pmatrix}$

$$P(\bar{s}) = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{r}(\bar{s}) = \begin{pmatrix} 160 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \pi(\bar{s}) = \begin{pmatrix} 0,143 \\ 0,571 \\ 0,286 \end{pmatrix} \quad g(\bar{s}) = 28,571 \quad W(\bar{s}) = \begin{pmatrix} 164,286 \\ 0 \\ 14,286 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora

$$\Omega^{\bar{s}}(s) = \hat{r}(s) + P(s) \cdot W(\bar{s}) \quad \forall s \in S$$

y vemos si se verifica la condición en cada componente.

$$\Omega_N^{\bar{s}} = \begin{cases} 160 + (0, 2 \ 0, 8 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 164,286 \\ 0 \\ 14,286 \end{pmatrix} = \mathbf{192,857} & s_N = H \\ 20 + (0, 4 \ 0, 6 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 164,286 \\ 0 \\ 14,286 \end{pmatrix} = 85,714 & s_N = L \end{cases}$$

$$\Omega_{Ro}^{\bar{s}} = \begin{cases} 20 + (0, 4 \ 0, 6 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 164,286 \\ 0 \\ 14,286 \end{pmatrix} = 85,714 & s_{Ro} = H \\ 20 + (0, 5 \ 0 \ 0, 5) \cdot \begin{pmatrix} 164,286 \\ 0 \\ 14,286 \end{pmatrix} = \mathbf{102,142} & s_{Ro} = L \end{cases}$$

No es necesario verificar $\Omega_{Re}^{\bar{s}}$ porque el beneficio en ese estado es independiente de H y L
(Propuesto: Confirmar).

Para el estado N , la política óptima efectivamente resulta ser H

En el estado Ro , acabamos de descubrir que H no era la decisión óptima para el L.P., entonces debe ser L .

(Propuesto: Verificar).

Finalmente, la política óptima será

$$s^* = \begin{pmatrix} H \\ H \\ L \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} H \\ L \\ L \end{pmatrix}$$

Dudas, consultas o errores:

Jaime Gacitúa
jpgacitua@ing.uchile.cl