

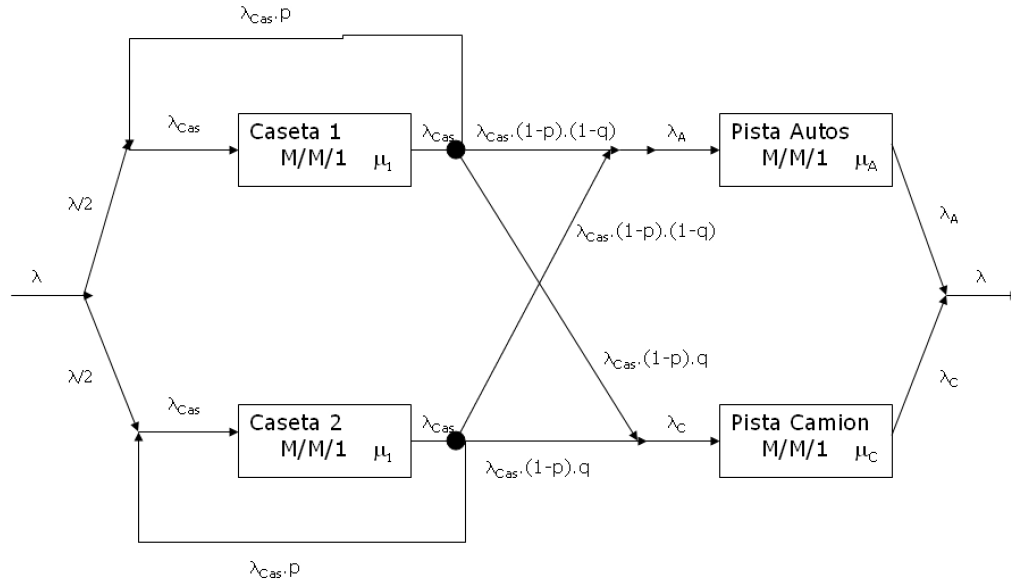


Auxiliar 22: Redes de Cola y Markov con Decisiones

Martes 23 de Junio de 2009

Problema 1

1. El sistema queda de la siguiente forma:



2. De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

| Sistema | Tasa Efectiva | Valor |
|----------|-----------------|--------------------------|
| Casetas | λ_{Cas} | $\frac{\lambda}{2(1-p)}$ |
| Autos | λ_A | $\lambda(1-q)$ |
| Camiones | λ_C | λq |

Respecto a las condiciones de estado estacionario estas son las siguientes:

| Sistema | Condición |
|----------|-----------------------------------|
| Casetas | $\frac{\lambda_{Cas}}{\mu_1} < 1$ |
| Autos | $\frac{\lambda_A}{\mu_A} < 1$ |
| Camiones | $\frac{\lambda_C}{\mu_C} < 1$ |

3. El número de camiones a la entrada de la pista de camiones es una cola M/M/1 con tasa de llegada λ_C y tasa de atención μ_C , luego utilizando el resultado conocido para colas de este tipo se tiene que:

$$\pi_k = \rho^k \cdot (1 - \rho)$$

$$\pi_0 = (1 - \rho)$$

$$\rho = \frac{\lambda_C}{\mu_C}$$

4. El número promedio de autos en la respectiva pista de obtiene utilizando L de una cola M/M/1:

$$L_A = \frac{\rho_A}{1 - \rho_A}$$

donde :

$$\rho_A = \frac{\lambda_A}{\mu_A}$$

5. Un auto dentro del sistema pasa por una de las casetas (que son iguales dada las tasas de atención y las tasas efectivas de entradas) y por la entrada de la pista de autos. Luego:

$$W_A = W_{Cas} + W_{pista}$$

Además se tiene que para un M/M/1 se tiene que:

$$W_{M/M/1} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Sin embargo el número de veces que un auto pasa por una caseta antes de ir a su respectiva pista, es una variables aleatoria de distribución geométrica de parámetro p . Recordando que la esperanza de una geométrica (p) es $\frac{1}{1-p}$ concluimos que:

$$W_{Cas} = \frac{1}{1-p} \cdot W_{M/M/1}$$

Entonces:

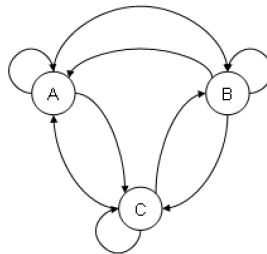
$$W_A = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{\mu_1 - \lambda_{Cas}} + \frac{1}{\mu_A - \lambda_A}$$

Análogamente para un camión:

$$W_C = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{\mu_1 - \lambda_{Cas}} + \frac{1}{\mu_C - \lambda_C}$$

Problema 2

1. La cadena queda se muestra en la figura.



Las políticas de decisión pueden ser especificadas como combinaciones de las políticas puras de publicidad y no publicidad. Sólo basta con especificar las matrices de transición para estas últimas (ver el enunciado).

Respecto a los beneficios asociados a las políticas estos serán:

$$r^{Sin} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad r^{Pub} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Esto no es más que resolver una programación dinámica donde el estado son las ventas y las decisiones son hacer o no publicidad. Esto queda de la siguiente forma (ojo, que el número de estados es 3 por lo que podemos especificar la función de beneficios para cada uno):

Etapas 0 (contando desde el final hacia atrás):

$$V(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Etapas k:

$$V_A(k) = \max \left\{ 3 + (0,5 \quad 0,3 \quad 0,2) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix}, 5 + (0,2 \quad 0,5 \quad 0,3) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_M(k) = \max \left\{ 1 + (0,4 \quad 0,4 \quad 0,2) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix}, 3 + (0,1 \quad 0,4 \quad 0,5) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_B(k) = \max \left\{ -1 + (0,4 \quad 0,6 \quad 0,0) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix}, 1 + (0,0 \quad 0,3 \quad 0,7) \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix} \right\}$$

3. Utilizaremos el algoritmo de Howard:

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} A \rightarrow Sin \\ M \rightarrow Sin \\ B \rightarrow Pub \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a esta política es la siguiente:

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 & 0,0 \end{pmatrix} \quad y \quad \bar{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el vector \bar{W} :

$$\bar{W} + g \cdot \vec{e} = \bar{r} + \bar{M} \cdot \bar{W}$$

Desde $\Pi = \Pi \cdot \bar{M}$ y $\sum_i \Pi_i = 1$ tenemos que:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0,22 \\ 0,48 \\ 0,30 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$g = \sum_i \Pi_i \cdot \bar{r}_i = 2,2$$

Por lo tanto:

$$(I - \overline{M})\overline{W} = \overline{r} - g \cdot e$$

$$\begin{pmatrix} 0,8 & -0,5 & -0,3 \\ -0,1 & 0,6 & -0,5 \\ -0,4 & -0,6 & 1,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_A \\ W_M \\ W_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,79 \\ 0,79 \\ -3,2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} W_A = 5,2 \\ W_M = 2,4 \\ W_B = 0,0 \end{matrix}$$

Ahora debemos construir la próxima política estacionaria.

$$S(A) = \begin{cases} 5 + (0,2 \quad 0,5 \quad 0,3) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} = 7,2 \\ 3 + (0,5 \quad 0,3 \quad 0,2) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} = 6,34 \end{cases} \Rightarrow Sin$$

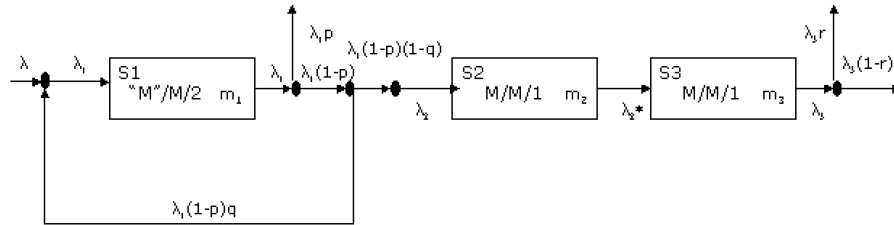
$$S(M) = \begin{cases} 3 + (0,1 \quad 0,4 \quad 0,5) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4,5 \\ 1 + (0,4 \quad 0,4 \quad 0,2) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4,06 \end{cases} \Rightarrow Sin$$

$$S(B) = \begin{cases} 1 + (0,0 \quad 0,3 \quad 0,7) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,7 \\ -1 + (0,4 \quad 0,6 \quad 0,0) \cdot \begin{pmatrix} 5,2 \\ 2,4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2,5 \end{cases} \Rightarrow Pub$$

Pero hemos reconstruido la política $\overline{S} \Rightarrow \overline{S}$ es la política óptima.

Problema 3

1. El sistema se muestra en la figura .



De esta forma se tiene que las tasas efectivas son las siguientes:

| Sistema | Tasa Efectiva | Valor |
|-----------|---------------|--|
| Sistema 1 | λ_1 | $\frac{\lambda}{1-(1-p) \cdot q}$ |
| Sistema 2 | λ_2 | $\frac{\lambda \cdot (1-p) \cdot (1-q)}{1-(1-p) \cdot q}$ |
| Sistema | λ_3 | $\frac{\lambda \cdot (1-p) \cdot (1-q)}{1-(1-p) \cdot q} \cdot E(N)$ |

Respecto a las condiciones de estado estacionario estas son las siguientes:

| Sistema | Condición |
|-----------|---------------------------------------|
| Sistema 1 | $\frac{\lambda_1}{2 \cdot \mu_1} < 1$ |
| Sistema 2 | $\frac{\lambda_2}{\mu_2} < 1$ |
| Sistema 3 | $\frac{\lambda_3}{\mu_3} < 1$ |

Luego el número promedio de fruta que es separado para la devoución es : $\lambda_1 \cdot E(N) + \lambda_3 \cdot r$

- El número promedio de cajas en los sistemas 1 y 2, corresponde al valor de L para colas M/M/2 y M/M/1 respectivamente, ie:

$$L_1 = \frac{2\rho_1}{1 - \rho_1^2}$$

$$L_2 = \frac{\rho_2}{1 - \rho_2}$$

donde :

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{2\mu_1}$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$$

Del mismo modo para el Sistema 3, se tiene que :

$$L_3 = \frac{\rho_3}{1 - \rho_3}$$

donde

$$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3}$$

El tiempo de permamencia de una fruta dentro del sistema se debe calcular, tomando en cuenta todos los casos posibles dados por el reflujo existente en el Sistema 1, se obtiene:

$$W_{total} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot W_1 \cdot (1-p)^{i-1} \cdot q^{i-1} \cdot p + \sum_{i=1}^{\infty} (i \cdot W_1 + W_2 + W_3) \cdot (1-p)^i \cdot q^{i-1} \cdot (1-q)$$

donde:

$$W_i = \frac{L_i}{\lambda_i}$$

Usando la fórmula de Little se tiene que :

$$W_{total} = \frac{L_{total}}{\lambda}$$

- Al mejorar los tiempos de atención podemos calcular un nuevo W_{total}^* . Luego la máxima disposición a pagar está dada por:

$$D = C(W_{total}^* - W_{total})$$