



## Pauta Auxiliar 21

Miércoles 17 de Junio de 2009

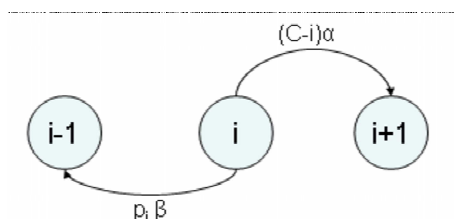
### Problema 1

1. El tiempo que demora cada uno de los  $k$  empleados en llegar al local se distribuye exponencial de tasa  $\alpha$ . El tiempo del primero de estos que llega sigue la distribución del mínimo de  $k$  exponenciales de tasa  $\alpha$ . Sabemos que esta distribución es exponencial de tasa  $k \cdot \alpha$ .
2. Mientras haya  $i$  autos en la concesionaria la probabilidad de compra de un cliente será  $p_i$ . Utilizando división de procesos de Poisson vemos que el proceso de compra de autos es Poisson de tasa  $\beta \cdot p_i$ . Entonces el tiempo entre compras se distribuye exponencial de tasa  $\beta \cdot p_i$ .
3. Modelamos los estados como el número de automóviles en el local. La cadena queda de la siguiente forma:



Vemos que la cadena tiene la estructura de un proceso de nacimiento y muerte.

Para definir la cadena completamente debemos especificar las tasas de transición entre estados. Cuando hay  $i$  autos en la concesionaria habrán  $C - i$  empleados conduciendo automóviles al local. por lo tanto la tasa de transición al estado  $i + 1$  será  $(C - i) \cdot \alpha$ . En la misma situación la tasa de compra será  $\beta \cdot p_i$  (parte 2). Con esto las tasa quedan de la siguiente forma.



En la figura anterior debemos obviar las transiciones desde  $C$  a  $C + 1$  y desde  $0$  a  $-1$  (no existen).

4. La cadena es irreducible y finita. Condición suficiente.

Para calcular las probabilidades estacionarias utilizamos las formulas de procesos de nacimiento y muerte.

$$\pi_i = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (C - j) \cdot \alpha}{\prod_{j=1}^i p_j \cdot \beta} \cdot \pi_0$$

$$\sum_{i=0}^C \pi_i = 1$$

5. Supondremos conocidas las probabilidades estacionarias.

En este caso la tasa efectiva de entrada de autos al sistema es (en el largo plazo):

$$\lambda = \sum_{i=0}^C (C-i) \cdot \alpha \cdot \pi_i$$

La tasa efectiva de salida de autos del sistema es:

$$\mu = \sum_{i=0}^C p_i \cdot \beta \cdot \pi_i$$

6. Mientras nos encontramos en el estado  $i$  los empleados llegan a la tienda con tasa  $(C-i) \cdot \alpha$  por lo que el costo esperado por unidad de tiempo es simplemente:

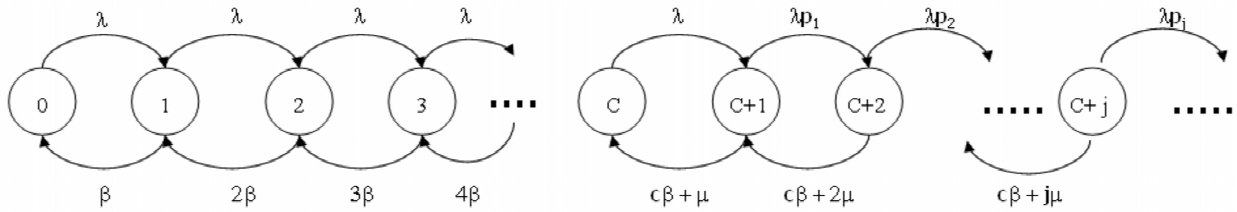
$$(C-i) \cdot \alpha \cdot X$$

Ahora si ajustamos este costo considerando que no me encuentro todo la unidad de tiempo en un estado, sino que solo estoy una fracción  $\pi_i$  (en términos esperados, en el largo plazo), tendremos que:

$$E[\text{Costo}] = \sum_{i=0}^C (C-i) \cdot \alpha \cdot X \cdot \pi_i = \lambda \cdot X$$

## Problema 2

1. Como es costumbre modelamos el número de personas en el sistema. La cadena toma la siguiente forma:



2. Al igual que en una cadena M/M/ $\infty$  solo necesitamos que  $\mu$  sea positivo, ya que la tasa de muerte es creciente y la de nacimiento está acotada por  $\lambda$ . Las expresiones necesarias para calcularlas son las siguientes:

$$\pi_i = \frac{1}{i!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^i \cdot \pi_0 \quad , \quad \forall i \leq C$$

$$\pi_i = \frac{\lambda^i}{C! \cdot \beta^C} \cdot \prod_{j=0}^{i-C-1} \frac{P_j}{C\beta + (j+1) \cdot \mu} \pi_0 \quad \forall i > C$$

Donde:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^C \frac{1}{i!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^i + \sum_{i=C+1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{C! \cdot \beta^C} \cdot \prod_{j=0}^{i-C-1} \frac{P_j}{C\beta + (j+1) \cdot \mu}}$$

3. Supondremos conocidos los valores de las probabilidades estacionarias.

- a) Razonamos calculando casos favorables sobre casos totales. Claramente los casos totales están dados por la cantidad de clientes que llegan en una hora ( $\lambda$ ). Los casos favorables son los siguientes:

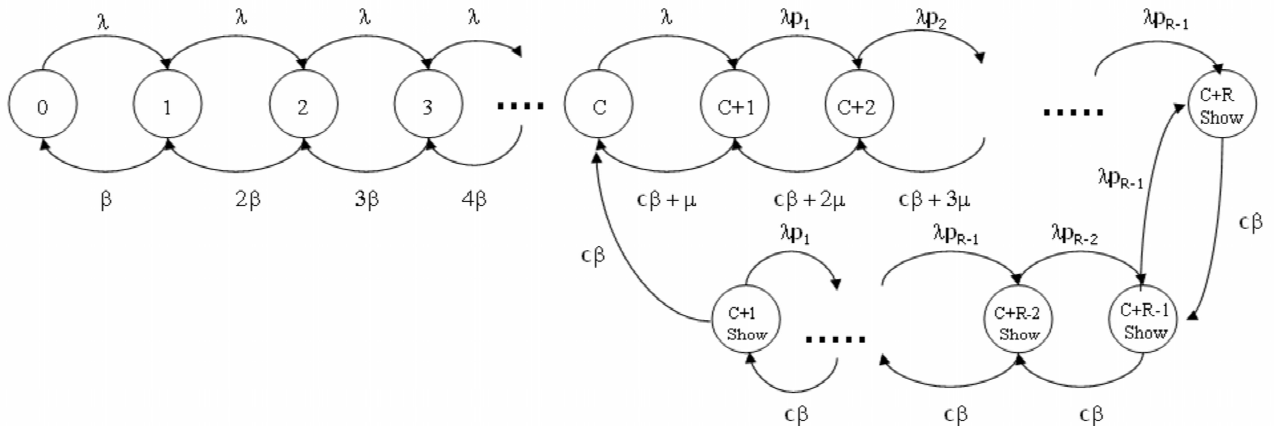
$$C.F. = \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot \lambda \cdot (1 - P_{i-C})$$

Entonces:

$$E[\% \text{ Clientes que no entran}] = \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot (1 - P_{i-C})$$

- b) Considerando a todos los clientes:  $\lambda$  (sin comentarios)  
Sin considerar a los que entran:  $\lambda \cdot (1 - \sum_{i=C+1}^{\infty} \pi_i \cdot (1 - P_{i-C}))$ .

4. La nueva situación puede ser modelada de la siguiente forma:



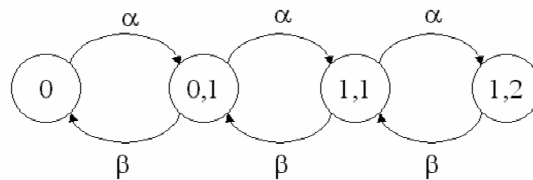
Acá hemos diferenciado explícitamente los estados en los cuales el guardia se encuentra en el escenario.

### Problema 3

1. Los estados son los siguientes:

- (0,0): No hay clientes ni en la sala de espera ni atendiéndose
- (0,1): Hay un cliente atendiéndose y la sala de espera esta vacía.
- (1,1): Hay un cliente atendiéndose y un cliente en espera.
- (2,1): Hay un cliente atendiéndose y dos en espera.

Luego la cadena se muestra en la siguiente figura:



2. Notamos en primer lugar que la fracción de clientes que en largo plazo logran ser atendidos corresponde a  $\Pi_{(0,0)} + \Pi_{(0,1)} + \Pi_{(1,1)}$ .

Dado que en promedio el empleado demora  $\frac{1}{\beta}$  en atender un cliente, un cliente que efectivamente es atendido, debe esperar en promedio hasta comenzar a ser atendido:

$$E(\text{T espera/cliente es atendido}) = \frac{\Pi_{(0,1)}}{\Pi_{(0,0)} + \Pi_{(0,1)} + \Pi_{(1,1)}} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{\Pi_{(1,1)}}{\Pi_{(0,0)} + \Pi_{(0,1)} + \Pi_{(1,1)}} \cdot \frac{2}{\beta}$$

3. El número de clientes por hora que en el largo plazo se van sin ser atendidos es:

$$\Pi_{(2,1)} \cdot \alpha$$

Por lo tanto, en el largo plazo, el costo esperado por hora es:

$$E(\text{Costo por hora}) = K \cdot \Pi_{(1,2)} \cdot \alpha$$