



## Auxiliar 21

Miércoles 21 de Junio de 2009

### Problema 1

Armijo Catalán es el dueño de una concesionaria de automóviles de última generación, en cuyas dependencias caben a lo más  $C$  unidades de estos bólidos. En esta ocasión Armijo centrará su atención en la política de mantención del inventario, y no en los precios que cobrará.

Tras noches de insomnio, Armijo determino la siguiente política: cada vez que realice una venta, ordenará a su proveedor un nuevo automóvil. Dicho proveedor cada vez que recibe un pedido inmediatamente selecciona a uno de sus múltiples empleados para que conduzca el auto hasta la concesionaria. Independiente del conductor el tiempo de viaje entre la bodega del proveedor y el local de Armijo se comporta como una variable aleatoria de distribución exponencial de media  $\frac{1}{\alpha}$  [horas]

Por otro lado la llegada de clientes a la concesionaria se puede modelar como un proceso de Poisson de tasa  $\beta$  [Clientes/hora]. No todos los clientes compran, sino que la probabilidad de compra de un cliente esta directamente relacionada con la cantidad de automóviles presentes en el local. Sea  $p_i$  la probabilidad de compra cuando hay  $i$  autos en la concesionaria.

Suponga que inicialmente se cuenta con  $C$  autos en la concesionaria. Al respecto responda las siguientes preguntas:

1. Si en un instante hay  $k$  empleados manejando cada uno un automóvil hacia el local de Armijo, ¿como se distribuye el tiempo hasta que el primero de ellos llega a su destino?
2. Mientras haya  $i$  autos en la concesionaria, ¿como se distribuye el tiempo hasta que se vende el próximo automóvil?
3. Utilizando las partes anteriores modele el sistema como una cadena de Markov en tiempo continuo
4. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y escriba el sistema de ecuaciones que permitiría calcularlas.
5. Encuentre expresiones para la tasa efectiva de venta de automóviles y para la tasa efectiva de llegada de automóviles.
6. Suponiendo que Armijo entrega una pequeña propina de  $\$X$  a cada conductor que llega hasta su local, ¿Cual es el costo esperado por unidad de tiempo de la entrega de propinas?

### Problema 2

Don King, nuevamente requiere de nuestra ayuda para estudiar el sistema de atención de una de sus sucursales bancarias.

El banco cuenta con  $C$  cajas en paralelo y opera con una cola única de capacidad ilimitada. Los clientes llegan según un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  [clientes/hora]. Si al llegar una persona al banco, hay  $j$  clientes en la fila, entra al sistema con probabilidad  $p_j$ , y en caso contrario, se va ( $P_0=1$ ).

Una vez en la cola, un cliente espera hasta que es atendido o hasta que se acaba su paciencia. Se sabe que, para cada cliente, el tiempo que transcurre desde que llega al sistema hasta que se agota su paciencia y decide irse, es una variable aleatoria exponencial de media  $\frac{1}{\mu}$  [horas].

Además se sabe que cada la atención de cada uno de los cajeros, es una variable aleatoria de distribución exponencial de media  $\frac{1}{\beta}$  [horas].

1. Modele la situación descrita como una Cadena de Markov en tiempo continuo.
2. Indique la condición de existencia de probabilidades estacionarias y entregue expresiones genéricas que le permitirían calcularlas.
3. Suponiendo conocidas las probabilidades estacionarias, responda las siguientes preguntas:
  - a) ¿Qué fracción de los clientes, que en una hora llegan al sistema, deciden no ponerse en la cola y retirarse sin entrar al banco?
  - b) ¿Cuál es la tasa promedio de salida de personas del sistema (tanto por atención como por aburrimiento)?

Ahora suponga que la capacidad para personas en cola es igual a  $R$  (Asuma  $p_R=0$ ). En el momento que el sistema se llena, Don Güilly, guardia del local, ágilmente se sube a un improvisado escenario dispuesto en el hall del banco, ha realizar una atrevida performance.

Según Don King, cuando el guardia está actuando, inhibe cualquier señal de aburrimiento por parte de los clientes. Don Güilly mantiene su show, mientras existan personas en cola.

Modele esta nueva situación como una Cadena de Markov en tiempo continuo.

### Problema 3

Un Servicio Público es atendido por un único empleado. La llegada de clientes al local sigue un proceso de Poisson de tasa  $\alpha$  [personas/hora]. Por su parte, el tiempo que tarda el empleado en cada atención sigue una exponencial de media  $\frac{1}{\beta}$  [horas].

El local cuenta con una sala de espera con capacidad para 2 personas, además de la que se está atendiendo, y la política de atención es por orden de llegada.

Los clientes que llegan y encuentran el local lleno, se retiran indignados. Cada cliente que se va del local sin ser atendido representa un costo de imagen para el Servicio en cuestión de  $K$  [u.m]

1. Modele el estado de ocupación del local como una Cadena de Markov en tiempo continuo.  
 Considere ahora que el sistema ya ha alcanzado su estado estacionario y asuma conocidas las probabilidades estacionarias.
2. Un cliente que logra entrar al sistema, ¿cuánto tiempo debe esperar en promedio hasta COMENZAR a ser atendido por el empleado?
3. En el largo plazo, ¿cuál es el costo esperado por hora, producto de clientes que se retiran sin ser atendidos?