



Solucion Auxiliar 19 Cadenas de Markov en Tiempo Continuo

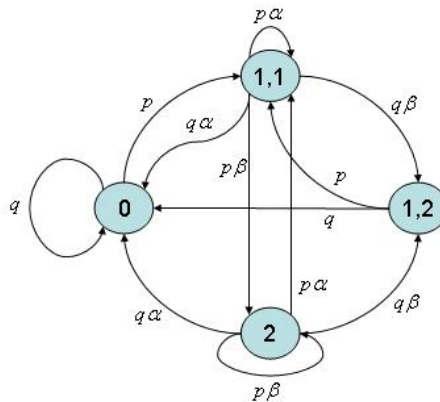
Problema 1

1. Dada la situación descrita en el enunciado la máxima cantidad de habitaciones ocupadas son 2.
2. Como todo problema de modelación es posible representar la situación bajo estudio de diferentes formas. En este caso, se muestra una cadena que contiene el mínimo número de estados posibles para la situación descrita.

Los estados son los siguientes:

- (0): El hotel se encuentra sin pasajeros durante la noche.
- (1,1): Hay un pasajero en el hotel, y está en su primera noche de estadía.
- (1,2): Hay un pasajero en el hotel, y está en su segunda noche de estadía.
- (2): Hay dos pasajeros del hotel. Es importante notar que cuando hay 2 psasjeros, uno de ellos está en su primera noche de estadía y el otro en la segunda noche.

La cadena se muestra en la siguiente figura:



A modo de ejemplo, a continuación se explican algunas transiciones de la cadena.

- $(0) \rightsquigarrow (1,1)$: Con probabilidad p llega un cliente, el que siempre llegará a estar en su primera noche de estadía. Por ahora, no nos preocupamos si se va a quedar por una segunda noche.
- $(1,1) \rightsquigarrow (0)$: Si es que no llega otro cliente (con probabilidad $1 - p$) y el que está actualmente sólo iba por una noche (con probabilidad α), se vuelve al hotel vacío.
- $(1,1) \rightsquigarrow (1,1)$: Si es que llega otro cliente (con probabilidad p) y el que está actualmente sólo iba por una noche (con probabilidad α), se sigue en el mismo estado.
- $(1,1) \rightsquigarrow (1,2)$: Si es que no llega otro cliente (con probabilidad $1 - p$) y el que está actualmente se queda por una segunda noche (con probabilidad β), se pasa al estado $(1,2)$.
- $(1,1) \rightsquigarrow (2)$: Si es que llega otro cliente (con probabilidad p) y el que está actualmente se queda por una segunda noche (con probabilidad β), se pasa al hotel con 2 habitaciones ocupadas.

El resto de las transiciones sigue la misma lógica.

Vemos que existe una única clase recurrente, aperiódica, conformada por la totalidad de los estados de la cadena. Para calcular las probabilidades estacionarias debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones (propuesto):

$$\begin{aligned}\vec{\pi} &= \vec{\pi}^T \cdot P \\ \sum_i \pi_i &= 1 \\ \pi_i &\geq 0 \quad \forall i\end{aligned}$$

Para las partes siguientes se consideran conocidas las probabilidades estacionarias.

3. Para calcular los ingresos, hay que notar que en los estados (1,1) se debe cobrar una primera noche de estadía, en el estado (1,2) la segunda noche, y en el estado (2) una primera noche y una segunda.

$$E(\text{Ingresos}) = A \cdot (\Pi_{(1,1)} + \Pi_2) + B \cdot (\Pi_{(1,2)} + \Pi_2)$$

Por otro lado, el número promedio de habitaciones ocupadas está dado por:

$$E(\text{Habit. ocupadas}) = 1 \cdot (\Pi_{(1,1)} + \Pi_{(1,2)}) + 2 \cdot \Pi_2$$

4. En primer lugar se debe calcular la esperanza de los costos. Los estados en los que se incurre en costos son el (1,1) y (2), ya que en ellos se produjo una llegada de un cliente. Luego la esperanza de los costos están dados por:

$$E(\text{Costos}) = C \cdot (\Pi_{(1,1)} + \Pi_2)$$

Luego la condición sobre A, B y C para que el hotel pueda financiarse en el Largo Plazo es:

$$A \cdot (\Pi_{(1,1)} + \Pi_2) + B \cdot (\Pi_{(1,2)} + \Pi_2) > C \cdot (\Pi_{(1,1)} + \Pi_2)$$

Pregunta 2

1. Estamos frente a una cola M/M/1. Los pasajeros actúan como servidor y los taxistas como clientes. Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ la cadena de Markov representa el número de taxistas esperando pasajeros. $X(t) \in N_0$. El generador infinitesimal de la cadena es

$$Q = (q_{ij}) = \begin{cases} -\mu & i = j = 0 \\ -(\lambda + \mu) & i = j, i \geq 1 \\ \mu & j = i + 1, \\ \lambda & j = i - 1, i \geq 1 \end{cases}$$

Para hacer cálculos en el largo plazo, debemos obtener las probabilidades estacionarias. Se plantean las ecuaciones de equilibrio,

$$\begin{aligned}\mu\pi_0 &= \lambda\pi_1 \\ (\mu + \lambda)\pi_i &= \mu\pi_{i-1} + \lambda\pi_{i+1} \quad \forall i = 1, 2, \dots \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i &= 1\end{aligned}$$

Sea $\rho = \frac{\mu}{\lambda}$ (Se asume $\rho < 1$). Con las ecuaciones anteriores se llega a

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 1 - \rho \\ \pi_i &= \rho^i \pi_0\end{aligned}$$

En esta pregunta se pide $L = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i = \frac{\mu}{\lambda - \mu}$

- Se busca el tiempo promedio que un taxi esta en el sistema, W . Ocupando Little y la parte anterior se obtiene

$$\begin{aligned}W &= \frac{L}{\mu} \\ &= \frac{1}{\lambda - \mu}\end{aligned}$$

- Se hace un análisis de $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$ por unidad de tiempo. La totalidad de los pasajeros llega al paradero a tasa λ . En el largo plazo, pasajeros llegan a un sistema vacío con tasa $\pi_0\lambda$, por lo tanto la fracción pedida es

$$\frac{\pi_0\lambda}{\lambda} = \pi_0$$

- Se define la función de utilidad

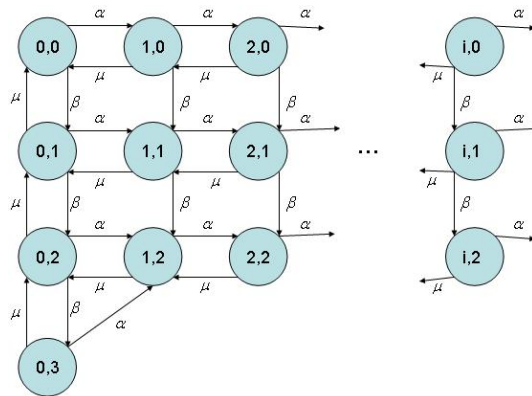
$$\Pi = B(1 - \pi_0)\lambda - C\pi_0\lambda - T \cdot L$$

El μ óptimo se obtiene al resolver

$$\frac{\delta \Pi}{\delta \mu} = 0$$

Pregunta 3

- Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ cadena de Markov en tiempo continuo que representa el número de pacientes graves y leves dentro del hospital. El conjunto de estados es $E = \{N_0 \times \{0, 1, 2\}\} \cup (0, 3)$. El primer índice indica el número de pacientes graves en el hospital; el segundo, los pacientes leves. El diagrama de estados es el siguiente:



Las ecuaciones que permiten encontrar las probabilidades estacionarias son las siguientes:

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)\pi_{0,0} &= \mu(\pi_{1,0} + \pi_{0,1}) \\
(\mu + \alpha + \beta)\pi_{0,1} &= \beta\pi_{0,0} + \mu(\pi_{1,1} + \pi_{0,2}) \\
(\mu + \alpha + \beta)\pi_{0,2} &= \beta\pi_{0,1} + \mu(\pi_{1,2} + \pi_{0,3}) \\
(\mu + \alpha)\pi_{0,3} &= \beta\pi_{0,2} \\
(\mu + \alpha + \beta)\pi_{i,0} &= \alpha\pi_{i-1,0} + \mu\pi_{i+1,0} \quad \forall i \geq 1 \\
(\mu + \alpha + \beta)\pi_{i,1} &= \alpha\pi_{i-1,1} + \beta\pi_{i,0} + \mu\pi_{i+1,1} \quad \forall i \geq 1 \\
(\mu + \alpha)\pi_{i,2} &= \alpha\pi_{i-1,2} + \beta\pi_{i,1} + \mu\pi_{i+1,2} \quad \forall i \geq 2 \\
(\mu + \alpha)\pi_{1,2} &= \alpha(\pi_{0,2} + \pi_{0,3}) + \beta\pi_{1,1} + \mu\pi_{2,2} \\
\sum_{\{i,j\} \in E} \pi_{i,j} &= 1
\end{aligned}$$

La respuesta a esta pregunta es W_q , de la cola de pacientes graves. Calculamos entonces L_q :

$$L_q = \sum_{\{i,j\} \in E: i \geq 1} (i-1)\pi_{i,j}$$

La tasa efectiva de entrada de pacientes graves es α , por lo tanto,

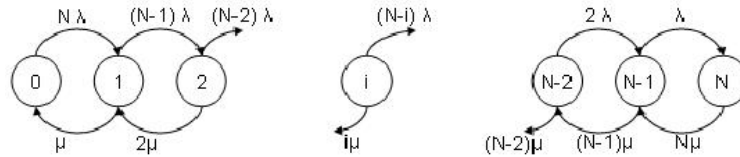
$$W_q = \frac{L_q}{\alpha}$$

- En el largo plazo, pacientes leves aparecen con una tasa β por hora en el sistema. Cuando la cadena está en los estados $(0,1), (0,2), (0,3)$ están siendo atendidos pacientes leves, por lo tanto la tasa efectiva a la cual salen pacientes leves del hospital es $(\pi_{0,1} + \pi_{0,2} + \pi_{0,3})\mu$. La fracción de pacientes leves que se retiran siendo atendidos satisfactoriamente es entonces

$$\frac{(\pi_{0,1} + \pi_{0,2} + \pi_{0,3})\mu}{\beta}$$

Problema 4

- Si siguiendo el enunciado modelamos la cantidad de parejas bailando en un instante determinado. La cadena resultante se muestra en la figura.



- En este caso basta con notar que la cadena es finita, por lo tanto tendrá ley de probabilidades estacionarias.

Respecto a las expresiones de las mismas utilizamos las fórmulas de los procesos de nacimiento y muerte. De esta forma tendremos que:

$$\begin{aligned}
\pi_i &= \frac{M \cdot (M-1) \cdot (M-2) \dots (M-i+1) \cdot \lambda^i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i \cdot \mu^i} \cdot \pi_0 \\
&= \binom{M}{i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{1}{\sum_{i=1}^M (\frac{\lambda}{\mu})^i} \\ &= (\frac{\mu}{\lambda + \mu})^M\end{aligned}$$

Entonces:

$$\pi_i = \binom{M}{i} (\frac{\lambda}{\lambda + \mu})^i \cdot (\frac{\mu}{\lambda + \mu})^{M-i}$$

Donde reconocemos una distribución binomial de parámetros $(M, \frac{\lambda}{\lambda + \mu})$

3. El número promedio de parejas bailando simplemente es la esperanza de la binomial, es decir:

$$E[\text{Parejas bailando}] = M \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

4. Inmediatamente nos damos cuenta que si M es impar la probabilidad es 0. Si M es par, entonces:

$$P[\text{Igual número de parejas sentadas que bailando}] = \binom{M}{\frac{M}{2}} (\frac{\lambda}{\lambda + \mu})^{\frac{M}{2}} \cdot (\frac{\mu}{\lambda + \mu})^{\frac{M}{2}}$$

5. La tasa media de entrada de parejas a la pista será:

$$\begin{aligned}Tasa_{IN} &= \sum_{i=0}^M \pi_i \cdot (M - i) \lambda \\ &= \sum_{i=0}^M \binom{M}{i} (\frac{\lambda}{\lambda + \mu})^i \cdot (\frac{\mu}{\lambda + \mu})^{M-i} \cdot (M - i) \lambda \\ &= M \lambda - M \lambda \cdot \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \\ &= M \lambda (\frac{\mu}{\mu + \lambda})\end{aligned}$$

6. La tasa media de salida de parejas de la pista será:

$$\begin{aligned}Tasa_{IN} &= \sum_{i=0}^M \pi_i \cdot i \cdot \mu \\ &= \sum_{i=0}^M \binom{M}{i} (\frac{\lambda}{\lambda + \mu})^i \cdot (\frac{\mu}{\lambda + \mu})^{M-i} \cdot i \cdot \mu \\ &= M \mu (\frac{\lambda}{\mu + \lambda})\end{aligned}$$

Claramente la tasa media de entrada a la pista es igual a la tasa media de salida de la pista. Si no, no existiría estado estacionario.