



Clase Auxiliar 19: Cadenas de Markov en Tiempo Continuo
10 de Junio de 2009

Problema 1

Un hotel opera en un paraje montañoso de elevado atractivo turístico. Cada tarde puede llegar un nuevo cliente solicitando una habitación, lo cual ocurre con probabilidad p , o bien puede no llegar ninguno (con probabilidad $q = 1 - p$). Una fracción α de los clientes se queda en el hotel sólo una noche (llegan una tarde y se van en la mañana siguiente), mientras que una fracción $\beta = 1 - \alpha$, decide quedarse una noche más disfrutando del hermoso paisaje (i.e. llegan una tarde y se van en la mañana del día subsiguiente). Nadie pasa más de 2 noches en el hotel.

1. ¿Cuál es el máximo número de habitaciones que pueden estar ocupadas simultáneamente?.
2. Modele el estado de ocupación del hotel para cada noche (cuántas habitaciones están ocupadas) como una cadena de Markov. Defina adecuadamente los estados, e indique las probabilidades de transición entre ellos. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y calcúlelas.
3. Suponga que el hotel le cobra a sus clientes A [\$] por la primera noche de estadía y B [\$] por noche adicional ($B < A$). ¿Cuál es el valor esperado del ingreso por noche en el largo plazo?. ¿Cuál es el número promedio de habitaciones ocupadas?.
4. Suponga que el día que un cliente llega al hotel se realiza un sanitizado de la habitación que ocupará, además se le regala un mapa de la zona y un pequeño objeto de artesanía típica del lugar (con el logo del hotel), y se le ofrece una bebida por cuenta de la casa. Todo lo anterior tiene un costo de C [\$]. ¿Qué relación deben cumplir A , B y C para que el hotel pueda financiarse en el largo plazo?.

Pregunta 2

Pasajeros llegan a un paradero de taxis según un proceso de Poisson de tasa λ pasajeros por hora. Los taxis llegan al paradero también según un proceso de Poisson de tasa μ taxis por hora. Los taxis forman una fila a la espera de un pasajero. Cuando llega un pasajero, toma el primer taxi de la fila y se va a su destino. Si no hay taxis en la fila, el pasajero se va y busca otro medio de transporte.

Calcule, para el largo plazo, lo siguiente:

1. Número promedio de taxis esperando en fila
2. Fracción de los pasajeros que no encuentra taxi

Considere que cada pasajero que se retira supone un costo C al sistema “taxis”. También, suponga que cada taxi en la fila significa un costo de T por hora de espera al sistema “taxis”. Adicionalmente, cada pasajero que toma un taxi representa un beneficio esperado de B al sistema “taxis”.

4. Si el sistema “taxis” puede regular la tasa de llegada μ , plantee las ecuaciones que permitan encontrar el μ óptimo para los taxistas (0,6 puntos).

Pregunta 3

Un centro médico atiende pacientes graves y pacientes leves. Los pacientes graves llegan al centro según un proceso de Poisson de tasa α pacientes por hora. Los pacientes leves llegan también según un proceso de Poisson de tasa β pacientes por hora.

La sala de espera para pacientes graves es muy grande (para efectos prácticos infinita), pero la sala de espera para pacientes leves acepta hasta 2 pacientes como máximo. Si llega un paciente leve al centro y la sala de espera está llena, el paciente se retira y se atiende en otro servicio.

El centro sólo puede atender a un enfermo a la vez. El tiempo de atención de un enfermo distribuye exponencialmente con tasa μ pacientes por hora, independiente si el paciente está grave o leve.

El centro atiende a los pacientes leves sólo cuando no hay pacientes graves en el centro, es decir, los pacientes graves tienen la prioridad. Incluso, si cuando están atendiendo a un paciente leve llegara un paciente grave, la atención al paciente leve es suspendida y este paciente leve es enviado a su sala de espera (si la sala de espera está llena el paciente leve se va del centro) y se atiende inmediatamente al paciente grave.

1. Exprese en función de los parámetros del problema, la fracción de los pacientes leves que se retiran del centro habiendo sido atendidos satisfactoriamente. (1,0 puntos)

Problema 4

A una fiesta muy particular asisten M parejas. Cada pareja toma la decisión de ir a la pista de baile independiente de las demás. El tiempo que pasa hasta que cada pareja se decide a salir a bailar es una variable aleatoria de distribución exponencial de parámetro $\lambda(1/\text{min})$. Por otro lado, el tiempo que permanece cada pareja bailando es una variable aleatoria de distribución exponencial de media $1/\mu(\text{min})$.

Cuando una pareja deja de bailar inicia un nuevo proceso para decidir si salir a la pista nuevamente (con la misma distribución de probabilidades), y así sucesivamente.

Por último suponga que la capacidad de la pista es suficiente, como para que todas las parejas este bailando al mismo tiempo, y que la fiesta dura por mucho tiempo.

1. Modele la cantidad de parejas bailando en cualquier instante como una Cadena de Markov en tiempo Continuo.
2. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y encuentre las expresiones que le permitan calcularlas.

En lo que sigue considere que las probabilidades estacionarias toman valores conocidos.

3. El número promedio de parejas que se encuentran en la pista en un instante cualquiera.
4. La probabilidad de que exista igual número de parejas bailando y sentadas en un instante cualquiera.
5. La tasa media de ingreso de parejas a la pista.
6. La tasa media de salida de parejas desde la pista de baile.