

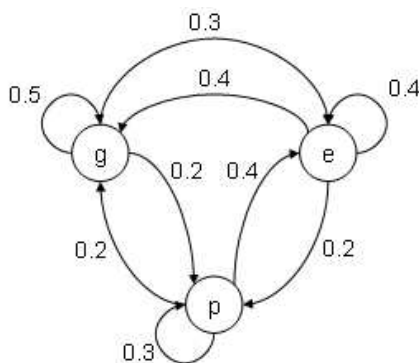


Pauta Auxiliar 16

Miércoles 27 de Mayo de 2009

Problema 1

Antes de responder las preguntas debemos determinar la estructura de la cadena. Los estados serán el resultado del partido de la semana. La cadena asociada se muestra en la figura.



- La pregunta va orientada a definir una estructura de costos y ocupar las formulas de Markov con beneficios. Para esto definimos la siguiente estructura:

$$r_g = 3 \quad r_e = 1 \quad r_p = 0 \quad r_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Esto implica que:

$$\hat{r}_g = 3 \quad \hat{r}_e = 1 \quad \hat{r}_p = 0$$

Adicionalmente necesitaremos los valores de las probabilidades estacionarias (existirán dado que se trata de una cadena irreducible de una clase recurrente aperiódica). Sin embargo si observamos P^{16} (en el enunciado) vemos que todas las filas son iguales por lo que podemos argumentar que ya convergió a su forma de estado estacionario, por lo que se puede decir que:

$$\pi_g = 0,42 \quad \pi_e = 0,36 \quad \pi_p = 0,22$$

De esta forma tendremos que

$$g = 3 \cdot 0,42 + 1 \cdot 0,36 = 1,62$$

Ahora debemos encontrar el valor de \vec{W} , que satisface:

$$\vec{W} + \begin{pmatrix} 1,62 \\ 1,62 \\ 1,62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \vec{W}$$

Imponiendo que $W_p = 0$ se tiene que:

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} 3,5\bar{6} \\ 1,3\bar{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces calculamos cuántos puntos se acumularán en 16 partidos (los restantes) si parto en el estado g :

$$\vec{v}(16) = 16 \cdot \begin{pmatrix} 1,62 \\ 1,62 \\ 1,62 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,5\bar{6} \\ 1,3\bar{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,42 & 0,36 & 0,22 \\ 0,42 & 0,36 & 0,22 \\ 0,42 & 0,36 & 0,22 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3,5\bar{6} \\ 1,3\bar{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

En particular nos interesa conocer $V_g(16)$. Esto es:

$$V_g(16) = 25,92 + 3,5\bar{6} - 0,42 \cdot 0,5\bar{6} - 0,36 \cdot 0,3\bar{4} \approx 29,1247$$

Entonces, si considero que ya llevaba un punto ganado, entonces espero juntar 30,1247 puntos en lo que queda de campeonato.

- Ahora me preguntan por los puntos acumulados desde un partido empatado hasta 17 fechas más. Para calcular esto no debo cambiar la estructura de beneficios por lo que el W será el mismo de la parte anterior. También puedo asumir que $P^{16} = P^{17}$. Es por esto que tendremos que:

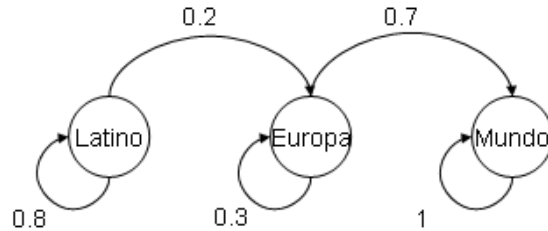
$$\vec{v}(17) = 17 \cdot \begin{pmatrix} 1,62 \\ 1,62 \\ 1,62 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,5\bar{6} \\ 1,3\bar{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,42 & 0,36 & 0,22 \\ 0,42 & 0,36 & 0,22 \\ 0,42 & 0,36 & 0,22 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3,5\bar{6} \\ 1,3\bar{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

En particular:

$$V_e(17) = 27,54 + 1,3\bar{4} - 0,42 \cdot 0,5\bar{6} - 0,36 \cdot 0,3\bar{4} \approx 28,5224$$

que es lo que nos están pidiendo calcular (en este caso no sumo un punto adicional)

- Si modelamos el estado de la carrera del técnico tendremos que la cadena asociada es la que se muestra en la figura.



Entonces, sólo debemos calcular w_{latino} utilizando las siguiente estructura de costos:

$$r_{latino} = r_{europa} = 1 \quad r_{mundo} = 0 \quad y \quad r_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Entonces \vec{W} debe cumplir con:

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{W}$$

Si imponemos $W_{mundo} = 0$ tendremos que la segunda ecuación es:

$$W_{europa} = 1 + 0,3 \cdot W_{europa} \Rightarrow W_{europa} = \frac{10}{7}$$

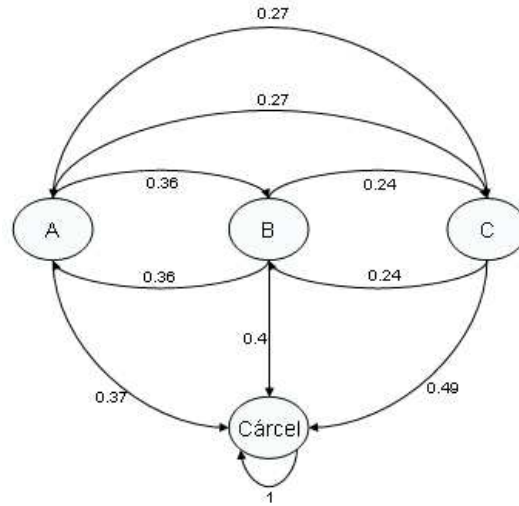
Remplazando en la primera ecuación tendremos que:

$$W_{latino} = 6,42$$

Que es exactamente el número esperado de temporadas que tardará el entrenador chileno en alcanzar la fama a nivel Mundial.

Problema 2

1. Para comenzar debemos ver cual es la forma de la cadena y especificar las probabilidades de transición. Estas son las que se ilustran en el dibujo.



La forma de calcular las probabilidades de pasar de un estado a otro es el siguiente:
La probabilidad de pasar de A a B es:

$$\begin{aligned} p_{AB} &= 0,5 \cdot P(\text{Pase A} \rightarrow B) \\ &= 0,5 \cdot 0,9 \cdot 0,8 \\ &= 0,36 \end{aligned}$$

Y de la misma forma para todas las transiciones entre estados A, B y C, y hacia la cárcel es la probabilidad complementaria.

Adicionalmente debemos definir la estructura de costos asociada. Debería ser claro que:

$$\begin{aligned} r_A &= 1000 \quad , \quad r_B = 3000 \quad , \quad r_C = 7000 \\ r_{AB} &= r_{BA} = -500 \quad , \quad r_{AC} = r_{CA} = -1000 \quad , \quad r_{BC} = r_{CB} = -2000 \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\hat{r}_A = 550 \quad , \quad \hat{r}_B = 2340 \quad , \quad \hat{r}_C = 6250$$

Entonces ahora debemos resolver el sistema (ojo: notar que $g = 0$):

$$\vec{W} + \vec{0} = \begin{pmatrix} 550 \\ 2340 \\ 6250 \\ 0 \end{pmatrix} + P \cdot \vec{W}$$

Eligiendo $W_{\text{Cárcel}} = 0$ tendremos que:

$$\vec{W}_T = (I - P_{TT})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 550 \\ 2340 \\ 6250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \end{pmatrix}$$

Una vez conocido el valor de W utilizamos las formulas de Markov con beneficios:

$$\vec{V}_n = (n) \cdot 0 \cdot \vec{e} + \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \\ 0 \end{pmatrix} + P^n \left[\begin{pmatrix} 1000 \\ 3000 \\ 7000 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

De este vector nos interesa la componente $V_n(A)$, dado que nos dicen que la condición inicial es partir en el país A.

Adicionalmente se nos pide el cálculo para $n=3$.

$$\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,0467 & 0,0936 & 0,0702 & 0,7895 \\ 0,0936 & 0,0467 & 0,0624 & 0,7973 \\ 0,0702 & 0,0624 & 0,0467 & 0,8207 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1000 \\ 3000 \\ 7000 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5394 \\ 6506 \\ 9268 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 4702,1 \\ 5789,7 \\ 8634,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la respuesta es 4702.

2. Reformulamos la pregunta: Cual es el tiempo esperado en el transiente partiendo desde B? A estas alturas sabemos que la respuesta es $W(B)$ donde \vec{W} es el vector que cumple con:

$$\vec{W} = [I - P_{TT}]^{-1} \cdot \vec{e}$$

$$\text{Con } P_{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0,36 & 0,27 \\ 0,36 & 0 & 0,24 \\ 0,27 & 0,24 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Por lo tanto :}$$

$$W = \begin{pmatrix} 2,4863 \\ 2,4365 \\ 2,2561 \end{pmatrix}$$

Y las respuesta es 2.4365.

Problema 3

1. En la cadena se tiene que los estados A y B forman una clase transiente y los estados C y T una clase recurrente aperiódica. Si la cadena inicialmente se encuentra en el estado A y queremos calcular el número esperado de transiciones hasta visitar **por primera vez** el *nodo terminal*, podemos descomponer esta esperanza como la suma de los siguientes 2 términos:

- El número esperado de transiciones hasta llegar al estado C , partiendo de A , lo que corresponde a W_A si utilizamos la estructura de contador de permanencia en el transiente.
- El número esperado de transiciones hasta llegar por primera vez al estado T , partiendo de C . Sea esta esperanza $E_{C,T}$.

Si denotamos a la esperanza pedida como E_A , se tiene que:

$$E_A = W_A + E_{C,T}$$

Para calcular W_A , utilizamos la siguiente estructura de costos de contador de permanencia en el transiente:

$$\hat{r}_A = 1 \quad \hat{r}_B = 1 \quad \hat{r}_C = 0 \quad \hat{r}_T = 0$$

En esta caso $g = 0$, ya que los estados transientes que tienen costos distintos de cero tienen probabilidades estacionarias nulas, por lo que debemos resolver el sistema:

$$[I - P]\vec{W} = \hat{r} \quad W_C = 0 \quad W_T = 0^1$$

Reemplazando con los valores de la cadena:

$$\begin{pmatrix} q & -q & 0 & 0 \\ -r & r+s & -s & 0 \\ 0 & 0 & u & -u \\ 0 & 0 & t-1 & 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_A \\ W_B \\ W_C \\ W_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dado que $W_C = W_T = 0$, del sistema matricial anterior se obtiene el siguiente sistema de 2X2.

$$qW_A - qW_B = 1 \quad -rW_A + (r+s)W_B = 1$$

Donde se obtiene que:

$$W_A = \frac{r+s+q}{q \cdot s}$$

Para calcular el término de $E_{C,T}$ se tiene que:

$$E_{C,T} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-u)^{k-1} \cdot u$$

Reordenando y usando la serie $\sum_{k=0}^{\infty} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2}$ entregada en el enunciado, se tiene que:

$$E_{C,T} = \frac{u}{1-u} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-u)^k = \frac{u}{1-u} \cdot \frac{1-u}{u^2} = \frac{1}{u}$$

Este resultado también se puede obtener directamente observando que la variable aleatoria a la cual le calculamos la esperanza es una geométrica, cuya valor se entrega en el enunciado.

Finalmente:

$$E_A = \frac{r+s+q}{q \cdot s} + \frac{1}{u}$$

2. Si inicialmente se encuentra en el estado X y queremos calcular el número esperado de transiciones hasta visitar por primera vez alguno de los nodos terminales (E_{X,T_1,T_2}), podemos separar esta esperanza en 3 partes:

- Esperanza del número de transiciones hasta salir del estado X . Este valor (E_x) se calcula de la misma forma que el segundo término de la parte 1, a través de la esperanza de la geométrica. Esto es: $E_X = \frac{1}{n+m}$.
- Si la cadena al salir de X evoluciona a la sub-cadena 1 (con probabilidad $\frac{n}{n+m}$), inicialmente se encuentra en el estado A_1 y queremos calcular el número esperado de transiciones hasta visitar **por primera vez** el *nodo terminal* T_1 , lo que calculamos en la parte 1, para el caso general.
- Si la cadena al salir de X evoluciona a la sub-cadena 2 (con probabilidad $\frac{m}{n+m}$), inicialmente se encuentra en el estado A_2 y queremos calcular el número esperado de transiciones hasta visitar **por primera vez** el *nodo terminal* T_2 , lo que calculamos en la parte 1, para el caso general.

$$E_{X,T_1,T_2} = \frac{1}{n+m} + \left[\frac{r_1+s_1+q_1}{q_1 \cdot s_1} + \frac{1}{u_1} \right] \cdot \frac{n}{n+m} + \left[\frac{r_2+s_2+q_2}{q_2 \cdot s_2} + \frac{1}{u_2} \right] \cdot \frac{m}{n+m}$$

¹Corresponde a los estados recurrentes