

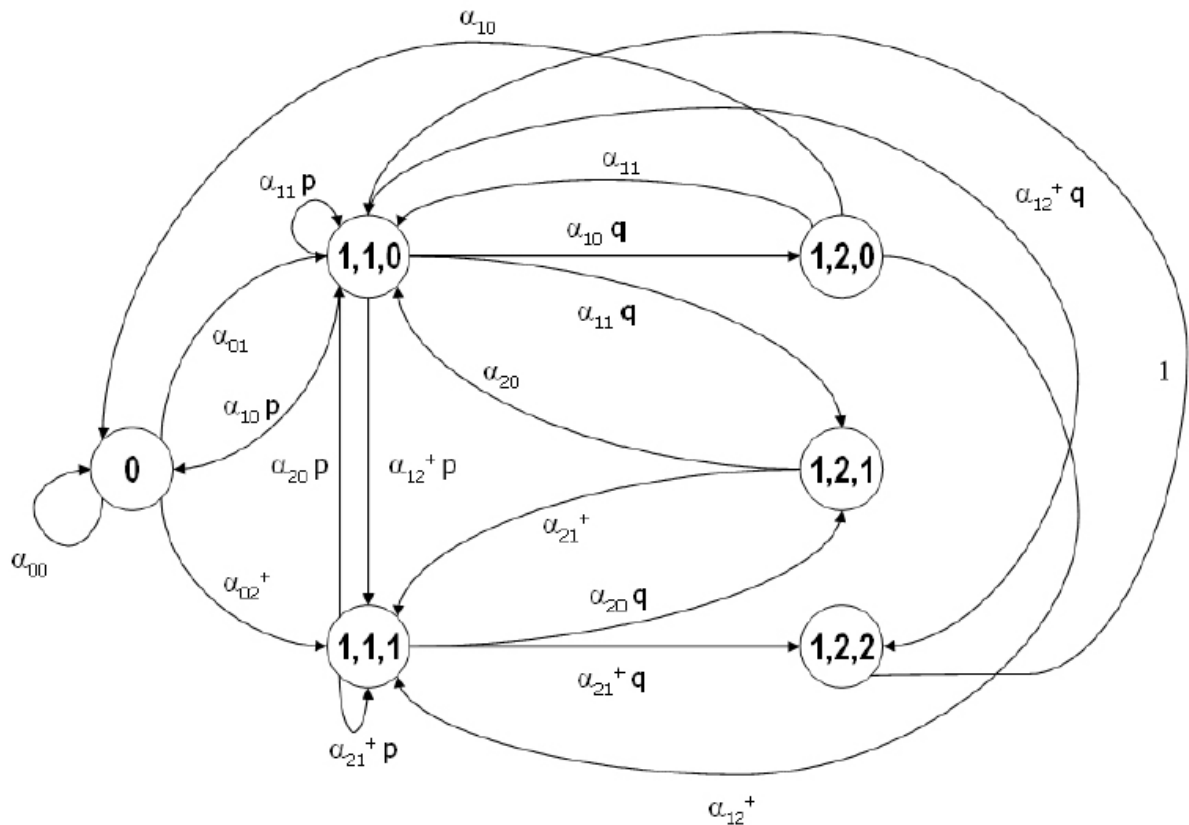


Auxiliar 17: Probabilidades Estacionarias y Markov con Beneficios

Martes 2 de Junio de 2009

Problema 1

- La cadena se muestra en la siguiente figura:



El estado (0) representa el consultorio vacío. Por otro lado en los estados de la forma (a, b, c) , a es el número de personas en atención, b en la hora de atención en que se encuentra y c la cantidad de personas esperando.

Vemos que existe una única clase recurrente, aperiódica, conformada por la totalidad de los estados de la cadena. Por lo tanto, existen probabilidades estacionarias.

- En esta parte consideramos conocido el vector Π de probabilidades estacionarias.

- Para responder a esta pregunta debemos ver que condiciones deben darse en cada estado para que existan pacientes que se retiren indignados. Esto sucede en los siguientes casos:
 - (0): Todos los pacientes que lleguen después del segundo (i.e., a partir del tercero).
 - (1, 1, 0): Todos los pacientes que lleguen después del segundo.

- (1, 1, 1): Todos los pacientes que lleguen, menos el primero.
- (1, 2, 0): Todos los pacientes que lleguen después del segundo.
- (1, 2, 1): Todos los pacientes que lleguen, menos el primero.
- (1, 2, 2): Todos los pacientes que lleguen.

Por lo tanto, denotando por E_1 a la esperanza de la cantidad de pacientes que una hora se retiran indignados se tiene que

$$E_1 = \Pi_0 \cdot \sum_{k>2} (k-2) \cdot \alpha_{0k} + \Pi_{(1,1,0)} \cdot \sum_{k>2} (k-2) \cdot \alpha_{1k} + \Pi_{(1,1,1)} \cdot \sum_{k>1} (k-1) \cdot \alpha_{2k} \\ + \Pi_{(1,2,0)} \cdot \sum_{k>2} (k-2) \cdot \alpha_{1k} + \Pi_{(1,2,1)} \cdot \sum_{k>1} (k-1) \cdot \alpha_{2k} + \Pi_{(1,2,2)} \cdot \sum_{k>0} k \cdot \alpha_{3k}.$$

- b) Si un paciente logró entrar al sistema pudo haberlo hecho en los siguientes estados: (0), (1, 1, 0), (1, 2, 0), (1, 1, 1) o (1, 2, 1). Por lo tanto, dado que el paciente entró al sistema, los “casos favorables” a considerar son los asociados a estos cinco estados.

Para determinar los “casos favorables” analicemos lo que sucede en cada uno de estos estados.

- Estados (1, 1, 1) y (1, 2, 1): En estos estados el paciente nunca será atendido en la siguiente hora, ya que ya había una persona esperando y ella será atendida antes (recuerde que el médico atiende por orden de llegada).
- Estado (0): El paciente será atendido en la próxima hora si es el primero en llegar. Esto puede suceder si es el único en llegar o si llegan más de uno y es el primero de ellos.
- Estado (1, 1, 0): Este caso es análogo al anterior, pero hay que considerar la posibilidad de que el paciente que actualmente se está atendiendo requiera una segunda hora con el médico.
- Estado (1, 2, 0): Este caso es análogo al caso del estado (0).

Denotemos por Π_{CT} a la probabilidad de estar en alguno de los cinco estados “favorables”, es decir

$$\Pi_{CT} = \Pi_0 + \Pi_{(1,1,0)} + \Pi_{(1,2,0)} + \Pi_{(1,1,1)} + \Pi_{(1,2,1)}.$$

Por lo tanto, la probabilidad pedida es:

$$P = \frac{1}{\Pi_{CT}} \left[\Pi_0 (\alpha_{01} + \frac{1}{2}\alpha_{02}^+) + \Pi_{(1,1,0)} \cdot p (\alpha_{11} + \frac{1}{2}\alpha_{12}^+) + \Pi_{(1,2,0)} (\alpha_{21} + \frac{1}{2}\alpha_{22}^+) \right]$$

Problema 2

1. Para calcular las probabilidades de transición es necesario ver qué eventos son los necesarios para tener cada una de las transiciones. Por ejemplo, para pasar del estado ON-OFF al estado OFF-ON es necesario que la componente A se apague y la componente B se encienda, lo que ocurre con una probabilidad $P_{\text{ON-OFF}; \text{OFF-ON}} = 0,6 \cdot 0,7 = \frac{21}{50}$. La matriz de transición resultante, siguiendo el mismo tipo de razonamiento es:

	ON-OFF	OFF-ON	Mala
ON-OFF	$0,4 \cdot 0,3$	$0,6 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3$
OFF-ON	$0,6 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,3$	$0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3$
Mala	0	0	1

La cadena resultante es la que se muestra en la figura.

Además, podemos ver claramente que existe una única clase recurrente (la del estado “Mala”), mientras que los otros 2 estados pertenecen a una clase transiente. Así existirá una ley de probabilidades estacionarias que estará dada por: $\Pi = [0 \ 0 \ 1]$.

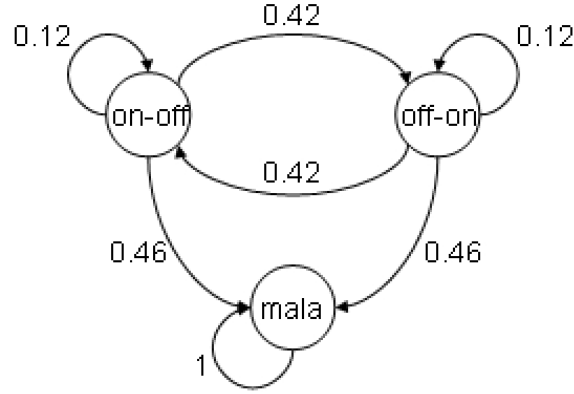


Figura 1: Cadena problema 13-1

- Utilizaremos las herramientas de Markov con Beneficios para calcular el tiempo esperado en el transiente. De esta manera, calcular el $\lim_{n \rightarrow \infty} V(n)$ se limita a encontrar el vector de relativos asintótico W y elegir la componente asociada al estado ON-OFF.

De esta manera tendremos que resolver:

$$W_T = \begin{bmatrix} \frac{44}{50} & \frac{-21}{50} \\ \frac{-21}{50} & \frac{44}{50} \end{bmatrix}^{-1} \cdot e_T$$

Para resolver este sistema NO se necesita invertir la matriz, si nos damos cuenta que comenzar en ON-OFF es equivalente a empezar en OFF-ON porque la situación es simétrica. Si multiplicamos por la matriz P_T debemos calcular:

$$\begin{bmatrix} \frac{44}{50} & \frac{-21}{50} \\ \frac{-21}{50} & \frac{44}{50} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Así, } x = \frac{50}{23}$$

Podemos ver que el tiempo esperado antes de que la máquina falle será $\frac{50}{23}$.

- En esta parte es necesario separar el motivo por el cual falla la máquina, además de introducir un estado que indique que la máquina está siendo reparada. Por esto bajo ambas interpretaciones, los desarrollos son los mismos. La matriz de transiciones en 1 etapa queda bien representada por:

	ON-OFF	OFF-ON	OFF-OFF	ON-ON	Rep
P= ON-OFF	$0,4 \cdot 0,3$	$0,6 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,7$	$0,6 \cdot 0,3$	0
OFF-ON	$0,6 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,3$	$0,6 \cdot 0,3$	$0,4 \cdot 0,7$	0
OFF-OFF	1	0	0	0	0
ON-ON	0	0	0	0	1
Rep	1	0	0	0	0

La cadena se muestra en la figura.

Podemos ver que existe una única clase recurrente aperiódica (formada por todos los estados), por lo que existirá una ley de probabilidades estacionarias.

- No estará operando una fracción $\pi_{\text{OFF-OFF}} + \pi_{\text{ON-ON}} + \pi_{\text{Rep}}$

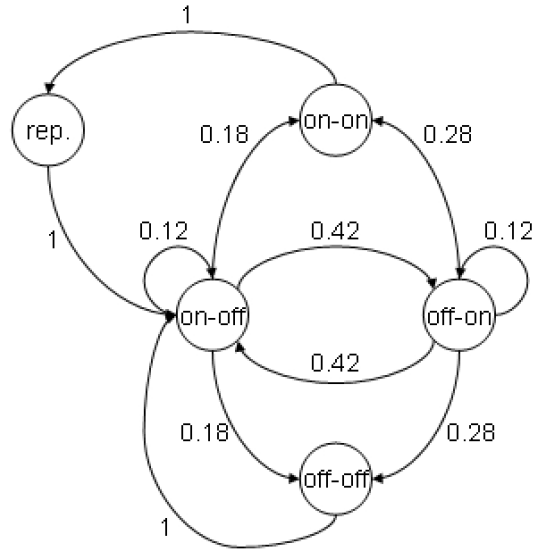


Figura 2: Cadena problema 13-3

Para calcular este valor es necesario resolver el sistema $\Pi = \Pi \cdot P$. Vamos a dejar todo en función de $\pi_{\text{ON-OFF}}$. Se tiene que:

$$\pi_{\text{OFF-ON}} = \frac{23}{50} \cdot \pi_{\text{ON-OFF}}$$

$$\pi_{\text{OFF-OFF}} = \pi_{\text{ON-ON}} = \pi_{\text{Rep}} = \frac{231}{50} \cdot \pi_{\text{ON-OFF}}$$

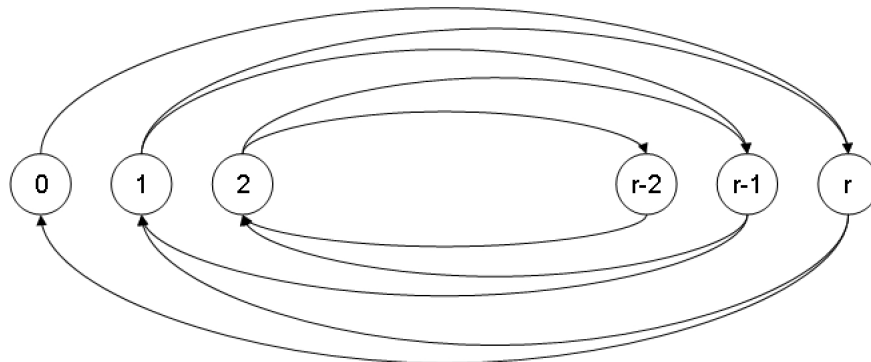
$$\pi_{\text{ON-OFF}} \left(1 + \frac{23}{50} + 3 \cdot \frac{231}{50} \right) = 1 \quad \text{donde se tiene que } \pi_{\text{ON-OFF}} = \frac{50}{766}$$

De esta manera, la fracción del tiempo que no estará operativo será $\frac{693}{766}$.

Para calcular el costo esperado de un período en el largo plazo hay que limitarse a calcular g . Así se tendrá $g = C \cdot \pi_{\text{OFF-OFF}} + k \cdot \pi_{\text{ON-ON}}$

Problema 3

1. Para definir la cadena debemos especificar los estados de la misma y las probabilidades de transición entre cada par de estado (elementos de la matriz de transición). Utilizando la indicación del enunciado la cadena es la que se muestra en la figura.



Entonces, del dibujo se ve que:

$$P[i \text{ paraguas}, j \text{ paraguas}] = \begin{cases} p & si \quad j = r - i + 1 \\ 1 - p & si \quad j = r - i \\ 0 & \sim \end{cases} \quad \forall i > 0$$

La definición de la matriz de transición se completa con:

$$P[[0 \text{ paraguas}, j \text{ paraguas}] = \begin{cases} 1 & si \quad j = r \\ 0 & \sim \end{cases}$$

2. Las ecuaciones que nos permiten encontrar las probabilidades estacionarias (existirán dado que se trata de una cadena ergódica) son las siguientes:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_r \cdot (1 - p) \\ \pi_1 &= \pi_r \cdot p + (1 - p) \cdot \pi_{r-1} \\ \pi_2 &= \pi_{r-1} \cdot p + (1 - p) \cdot \pi_{r-2} \\ \pi_3 &= \pi_{r-2} \cdot p + (1 - p) \cdot \pi_{r-3} \\ &\vdots \\ \pi_{r-1} &= \pi_2 \cdot p + (1 - p) \cdot \pi_1 \\ \pi_r &= \pi_1 \cdot p + \pi_0 \\ \sum_{i=0}^r \pi_i &= 1 \end{aligned}$$

Utilizando las r primeras ecuaciones descubrimos que:

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 \dots = \pi_r = \frac{\pi_0}{(1 - p)} = \pi$$

Si utilizamos esto en la última ecuación llegamos a que:

$$\begin{aligned} \pi \cdot (r + 1 - p) &= 1 \\ \pi &= \frac{1}{r + 1 - p} \\ \pi_0 &= \frac{1 - p}{r + 1 - p} \end{aligned}$$

3. Se mojará sólo en las ocasiones que esté en un lugar donde no hayan paraguas (fracción π_0 de los casos) y le toque la mala suerte que llueva (con probabilidad p). Entonces el resultado es:

$$\text{fracción que se moja} = \frac{p(1 - p)}{r + 1 - p}$$