



## Auxiliar 17: Probabilidades Estacionarias y Markov con Beneficios

Martes 2 de Junio de 2009

### Problema 1

Un Centro Médico es atendido por un único médico conocido como **Pepe**, ex-vocalista del famoso grupo **Pepe y Los Markovianos**. La sala de espera de la consulta tiene capacidad para sólo dos personas, y los pacientes que llegan y encuentran ambos espacios ocupados se retiran indignados.

Según datos históricos, **Pepe** sabe que el tiempo que transcurre desde que un paciente comienza a ser atendido hasta que se va de la consulta, es exactamente una hora para una fracción  $p$  de los clientes, y de dos horas para una fracción  $q$ , con  $q = 1 - p$ . Ningún paciente permanece más de dos horas siendo atendido por el médico.

Las distribuciones de probabilidad de la cantidad de pacientes que llegan al consultorio en una hora son conocidas. La probabilidad que lleguen en una hora  $k$  pacientes, dado que al comienzo de esta hora había  $i$  pacientes dentro del local es  $\alpha_{ik}$ .

Al comienzo de cada hora, si el doctor está desocupado acude a la sala de espera del Centro. Si hay pacientes esperando, atiende al que corresponda, según orden de llegada. Si la sala de espera está vacía no atenderá pacientes durante **toda** esa hora, y se dedicará a rememorar viejos tiempos desempolvando su guitarra del baúl de los recuerdos. No obstante, mientras el doctor no está atendiendo, los pacientes pueden seguir llegando al Centro Médico y entrarán en el caso que hayan lugares disponibles para esperar. En caso que un paciente entra al sistema en esta situación tendrá la fortuna de escuchar los viejos éxitos de **Pepe**.

Por último, suponga que inicialmente el consultorio está vacío con el doctor tocando guitarra, y que el médico atiende por suficiente tiempo tal que se alcanza el régimen estacionario.

1. (3,0 pts.) Modele el estado de ocupación del Centro Médico al comienzo de cada hora, como una Cadena de Markov en Tiempo Discreto. Encuentre las probabilidades de transición en función de las probabilidades  $\alpha_{ik}$  y del resto de los parámetros del problema. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias.
2. Considere que al médico le interesa conocer el comportamiento del sistema en el Largo Plazo, para lo cual requiere conocer las expresiones que se detallan a continuación. Asumiendo conocidas las probabilidades estacionarias, calcule:
  - a) (1,0 pto.) La esperanza de la cantidad de pacientes que en una hora, se retiran indignados sin poder ingresar al Centro Médico.
  - b) (1,0 pto.) La probabilidad de que un paciente que logra entrar al sistema, sea atendido al comienzo del período siguiente al de su arribo.

### Problema 2

En un laboratorio existe un sofisticado equipo electrónico con 2 componentes, las que llamaremos  $A$  y  $B$ , las que pueden estar *encendidas* (ON) o *apagadas* (OFF). Para que este equipo funcione correctamente es necesario que una y sólo una de las componentes se encuentre encendida (si se encienden ambas se produce

un alza de voltaje que destruye el equipo, mientras que si ambas están apagadas el sistema suspende sus actividades definitivamente).

El comportamiento de *encendido* y *apagado* es aleatorio e independiente para ambas componentes, pudiendo cambiar al comienzo de cada día. Estos, sólo han podido determinar las probabilidades de transición entre estos estados para ambas componentes, los que se muestran a continuación:

Componente A			Componente B		
	ON	OFF		ON	OFF
ON	0.4	0.6	ON	0.3	0.7
OFF	0.6	0.4	OFF	0.7	0.3

1. Modele el estado del equipo como una Cadena de Markov de tiempo discreto. Determine si existen probabilidades de estado estacionario y escriba la matriz de transición de un período.
2. Si la componente *A* está actualmente en ON y la componente *B* en OFF, ¿Cuál será la duración esperada del equipo antes de fallar?.

Suponga ahora que cada vez que el equipo deja de funcionar porque ambas componentes se encuentran encendidas se incurre en un costo de  $C$  [\$] porque hay que realizar reparaciones mayores producto del alza de voltaje. Estas reparaciones demoran exactamente dos días (el día en que falla y uno adicional), luego de los cuales la máquina comenzará a operar con la componente *A* en ON y la *B* en OFF.

Sin embargo, si el equipo ha dejado de funcionar porque ambas componentes están en OFF el encargado del laboratorio al inicio del día siguiente interviene y pone en ON a la componente *A*, incurriendo en un costo  $k$  [\$] con  $k < C$  asociados a no tener el equipo funcionando un día.

En esta situación conteste las siguientes preguntas:

1. Modele la nueva situación como una cadena de Markov en tiempo discreto. Determine las probabilidades de transición de un período.
2. ¿Cuál es la fracción del tiempo en el largo plazo que la máquina no estará operativa?. ¿Cuál es el costo promedio diario en el largo plazo de mantener el equipo operando?.

### Problema 3

Un individuo posee  $r$  paraguas, que usa para ir caminando de su casa a la oficina y viceversa. Si él está en su casa al comienzo del día y está lloviendo, entonces, si al menos hay un paragua en la casa, él tomará uno para ir a su oficina. Análogamente, si él está en su oficina, tomará uno para ir a su casa. Si no está lloviendo no toma ningún paragua. Suponga, que independiente del pasado, llueve al comienzo (final) del día con probabilidad  $p$ .

1. Defina una cadena de Markov de  $r + 1$  estados que ayude a determinar que proporción del tiempo el individuo se moja.  
Hint: Defina los estados de la cadena como el número de paraguas que tiene la persona en el lugar en que se encuentra (ya sea su casa o la oficina). Suponga que existe una transición cada vez que el individuo cambia de lugar (de la casa a la oficina o viceversa)
2. Encuentre las probabilidades estacionarias.
3. ¿Qué fracción del tiempo (porcentaje de caminatas) el individuo se moja?.