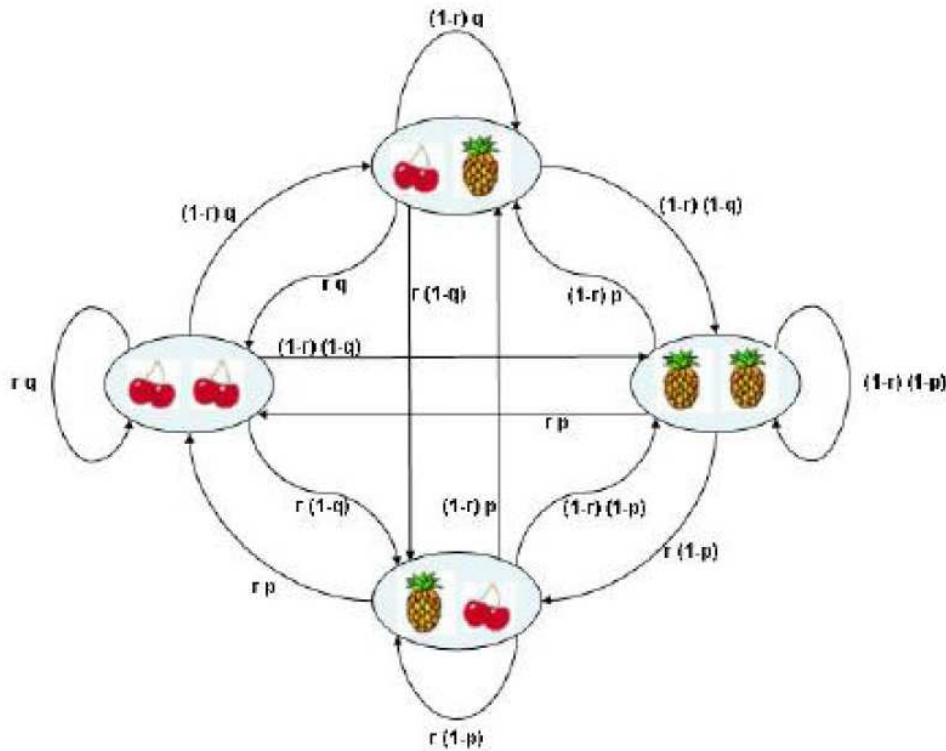


## Pauta Auxiliar 15

### Problema 1

1. Los estados y las probabilidades de transición entre ellos son los que se indican en el siguiente grafo:



Vemos que existe una única clase recurrente, aperiódica, conformada por la totalidad de los estados de la cadena. Las probabilidades de transición deben ser justificadas por separado.

2. La cadena es finita y existe una única clase recurrente, aperiódica, por lo tanto existirá una ley de probabilidades estacionarias. Para encontrar el valor de estas probabilidades simplemente calculamos una ley estable (la única):

$$\begin{aligned}
 P_{GG} &= r \cdot q \cdot P_{GG} + r \cdot q \cdot P_{GP} + r \cdot p \cdot P_{PG} + r \cdot p \cdot P_{PP} \\
 P_{GP} &= (1-r) \cdot q \cdot P_{GG} + (1-r) \cdot q \cdot P_{GP} + (1-r) \cdot p \cdot P_{PG} + (1-r) \cdot p \cdot P_{PP} \\
 P_{PG} &= r \cdot (1-q) \cdot P_{GG} + r \cdot (1-q) \cdot P_{GP} + r \cdot (1-p) \cdot P_{PG} + r \cdot (1-p) \cdot P_{PP} \\
 P_{PP} &= (1-r) \cdot (1-q) \cdot P_{GG} + (1-r) \cdot (1-q) \cdot P_{GP} + (1-r) \cdot (1-p) \cdot P_{PG} + (1-r) \cdot (1-p) \cdot P_{PP} \\
 1 &= P_{GG} + P_{GP} + P_{PG} + P_{PP}
 \end{aligned}$$

3. Dado que la máquina ha sido utilizada por mucho tiempo podemos suponer que hemos alcanzado el estado estacionario (recuerden que no miramos la situación actual del traga monedas). De esta manera la distribución de probabilidades del resultado de mi tirada será la distribución de la ley de probabilidades estacionarias. Entonces, la probabilidad de ganar es la probabilidad de encontrar la máquina en un estado donde ambos símbolos sean iguales y además realizar la elección correcta. Esto es:

$$\begin{aligned} P[\text{Ganar}] &= P[\text{Escoger Guinda-Guinda}] \cdot P_{GG} + P[\text{Escoger Piña-Piña}] \cdot P_{PP} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (P_{GG} + P_{PP}) \end{aligned}$$

Entonces:

$$E[\text{Utilidades}] = \frac{1}{2} \cdot (P_{GG} + P_{PP}) \cdot G - [1 - \frac{1}{2} \cdot (P_{GG} + P_{PP})] \cdot (C + T)$$

4. Nuevamente, dado que la máquina lleva mucho tiempo funcionando suponemos que el resultado de la próxima tirada se rige de acuerdo a la ley de probabilidades estacionarias. Si es así, los únicos estados que nos permiten obtener una ganancia son los estados Guinda-Piña y Piña-Guinda. Entonces:

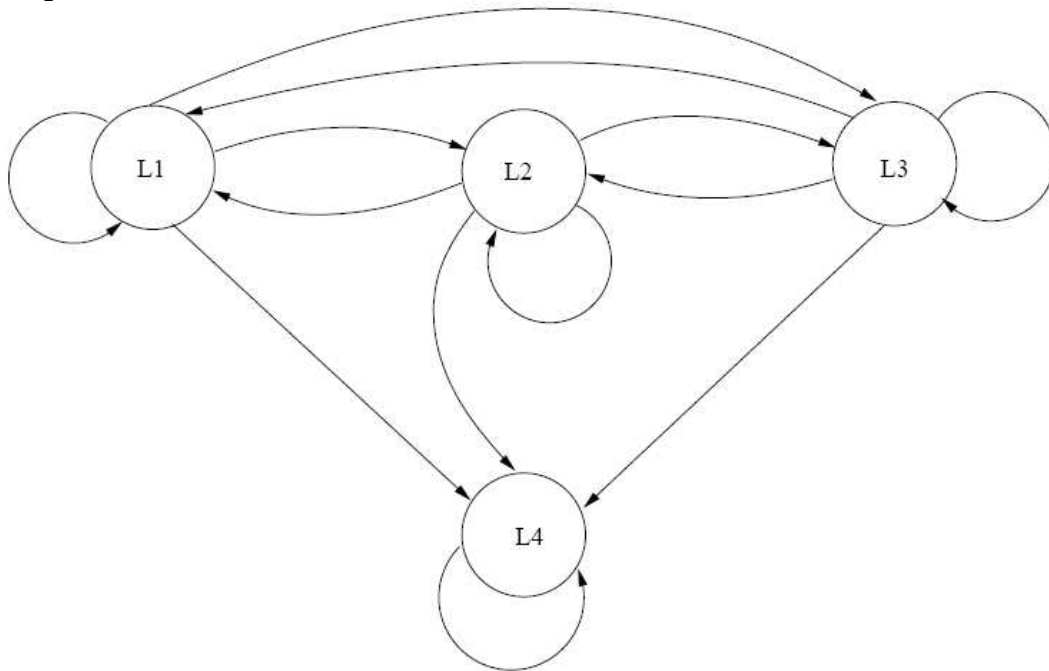
$$P[\text{ganar}] = P_{GP} + P_{PG}$$

De esta forma:

$$E[\text{Utilidades}] = P_{GP} + P_{PG} \cdot G - [1 - P_{GP} + P_{PG}] \cdot (C + T) - W$$

## Problema 2

1. La cadena de Markov tiene cuatro estados, uno asociado a cada local. El grafo que la representa es el siguiente:



Los estados pueden ser separados en las siguientes clases:

- $\{L1, L2, L3\}$ : clase transiente.
- $\{L4\}$ : clase recurrente aperiódica.

La matriz de probabilidades de transición es (con filas y columnas ordenadas según los estados L1, L2, L3, L4, en este orden, y este orden utilizaremos para todos los vectores y matrices en esta pauta):

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \frac{1-p_1}{3} & \frac{1-p_1}{3} & \frac{1-p_1}{3} \\ \frac{1-p_2}{3} & p_2 & \frac{1-p_2}{3} & \frac{1-p_2}{3} \\ \frac{1-p_3}{3} & \frac{1-p_3}{3} & p_3 & \frac{1-p_3}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Esta cadena tiene probabilidades estacionarias ya que es una cadena del tipo “ergódica más transiente” (o equivalentemente, porque tiene una sola clase recurrente, la cual es aperiódica). Como la clase recurrente tiene apenas un estado, las probabilidades estacionarias se determinan sin necesidad de cálculos:

$$\pi = [0, 0, 0, 1]$$

De aquí podemos concluir que, a partir de un cierto momento, Giuseppe irá siempre a L4, ya que es el único estado recurrente de la cadena (que es finita).

Para lo que sigue hay, al menos, dos maneras de modelar los costos, cualquiera de las cuales conduce a los mismos resultados.

- Primera forma:  
Asignamos a cada estado el costo de la entrada y a cada transición del tipo “quedarse en el mismo estado” el valor del descuento. Es decir,  $r_i = E$  y  $r_{ii} = F$  para cada  $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $r_{ij} = 0$  para  $i$  distinto de  $j$ .
- Segunda forma:  
Asignamos costos nulos a cada estado y manejamos los costos de las entradas vía las transiciones. Es decir,  $r_i = 0$  y  $r_{ii} = E - F$  para cada  $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $r_{ij} = E$  para  $i$  distinto de  $j$ .

En ambos casos se obtiene que:

$$\hat{r} = \begin{bmatrix} E - p_1 F \\ E - p_2 F \\ E - p_3 F \\ E - F \end{bmatrix}.$$

3.  $g = \pi \cdot \hat{r} = E - F$ . En nuestro caso, esto nos dice que, en el estado estacionario, Giuseppe pagará la entrada con descuento (esto lo podemos concluir también del hecho que sabemos que en el estado estacionario siempre irá al mismo local).

4. Para obtener  $W$ , fijamos  $W_4 = 0$  (estamos basándonos en el estado recurrente) y resolvemos el sistema:

$$W + ge = \hat{r} + PW$$

Con los datos que tenemos, esto se reduce a determinar  $W^T = [W_1, W_2, W_3]^T$ , resolviendo el sistema:

$$\begin{bmatrix} 0,6 & -0,2 & -0,2 \\ -0,2 & 0,6 & -0,2 \\ -0,1 & -0,1 & 0,3 \end{bmatrix} W_T = \begin{bmatrix} 0,6D \\ 0,6D \\ 0,3D \end{bmatrix},$$

cuya solución es  $W^T = [3D; 3D; 3D]^T$ .

Esto puede interpretarse como que Giuseppe irá, en promedio a tres espectáculos que no le gusten (cambios de local entre una semana y la siguiente, por los cuales pierde los descuentos) antes de ir al local "L4". A partir de esto, y sin cálculos adicionales, no podemos concluir cuánto tiempo le llevará descubrir este local (no tenemos información de cuántas veces, en media, le gustará el espectáculo de los otros locales).