

Auxiliar 15: Cadenas de Markov con Beneficios

Martes 26 de Mayo de 2009

Problema 1, CTP 5 Otoño 2003

En un famoso casino, existe un traga monedas con sólo dos ventanas, en cada una de las cuáles puede aparecer una piña o un guinda. Dado los años de uso es sabido que la máquina está descalibrada y opera de la siguiente manera: cada vez que un jugador inserta una ficha y tira de la palanca, las dos ventanas funcionan en forma independiente. La probabilidad que en la segunda ventana a aparezca una guinda es siempre r , en cambio en la primera ventana la probabilidad que aparezca una guinda es q , si antes había aparecido una guinda, y p si antes había aparecido una piña.

El sistema de apuesta es el siguiente: Antes de ingresar la moneda de C [u.m.] usted debe predecir el resultado exacto¹ de la jugada. Si acierta recupera la inversión y gana G [u.m.] adicionales. De lo contrario pierde la inversión y debe pagar T [u.m.] adicionales.

1. Modele los resultados de la máquina traga monedas como una cadena de Markov en tiempo discreto. Indique claramente los estados, clases y probabilidades de transición.
2. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y plantee el sistema de ecuaciones que le permitiría encontrarlas.
3. Suponga que usted llega al casino y encuentra el traga monedas desocupado luego de haber sido utilizada durante “mucho” tiempo. Sin ver el estado actual de la maquina, usted escoge equiprobablemente cualquiera de los posibles resultados en que las 2 ventanas son iguales y tira de la palanca. ¿Cuál es el valor esperado de los beneficios de esta jugada? (Suponga conocidas las probabilidades estacionarias).
4. Ahora suponga que pagando W [u.m.] adicionales (inversión que no se recupera) usted puede retrasar su apuesta hasta una vez conocido el resultado de la primera ventana. Así, su decisión consiste en predecir si el resultado de la segunda ventana es igual o diferente al de la primera. Considere que su estrategia es decir siempre la figura contraria a la de la primera ventanilla y el traga monedas lleva funcionando “mucho” tiempo. ¿Cuál es el valor esperado de los beneficios de esta nueva estrategia de juego bajo este nuevo sistema?

¹ Predecir correctamente la figura de la primera ventana y la figura de la segunda ventana

Problema 2, Control 2 Otoño 2003

Giusseppe, un dedicado estudiante de nuestra escuela, está preocupado con el estrés que le está produciendo tanto estudio este semestre. Para mantener su salud, ha decidido dedicar las noches de los viernes para salir y “ventilar la mente”. Para ello ha elegido cuatro locales de entretenimiento nocturna de una conocida zona de Santiago. Los locales que ha elegido son “L1”, “L2”, “L3” y “L4”.

Según información que nos proporcionó un amigo cercano, Giusseppe decide a qué local dirigirse cada fin de semana de acuerdo a los siguientes criterios:

- Si el show de la semana anterior le gustó, este viernes se dirige al mismo local.
- Si el espectáculo al que acudió la semana anterior no le gustó, este semana concurrirá a otro local. En este caso el próximo local a visitar (de los tres posibles) es escogido equiprobablemente.

Además, nuestro informante nos comentó, a partir de su experiencia como compañero de salidas de Giusseppe, que él sale satisfecho del local “L_i” con una probabilidad p_i , que es igual todas las semanas e independiente de todas las salidas anteriores. En particular, nos garantiza con certeza absoluta que el espectáculo de “L4” le gustará a Giusseppe siempre (es decir $p_4 = 1$).

1. Construya una cadena de Markov que represente las salidas de los viernes de Giusseppe. Construya un grafo que la represente. Identifique las probabilidades de transición entre estados.
2. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y calcúlelas. ¿Podemos afirmar, que a partir de algún momento, Giusseppe concurrirá todas las semanas al mismo local? En caso afirmativo, ¿a cuál de ellos lo hará? Justifique.

Considere ahora que las entradas en cualquiera de los cuatro locales mencionados tienen un valor $\$E$ y que todos los locales tienen la política de realizar un descuento de valor $\$F$ si es presentada una entrada de la semana anterior (i.e. Giusseppe se gana un descuento si concurre dos semanas seguidas al mismo local).

3. Determine el costo asociado a una transición en el estado estacionario. ¿Qué interpretación tiene este valor en nuestro caso?
4. Suponiendo que las probabilidades de que un espectáculo le guste a Giusseppe en los locales “L1”, “L2” y “L3” son $p_1 = p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,7$, respectivamente, determine un vector asintótico de beneficios relativos (W). Interprete el resultado obtenido. A partir de estos valores, y sin cálculos adicionales, ¿es posible determinar cuántas semanas, en promedio, Giusseppe debería esperar para descubrir el local en el que siempre le gustará el espectáculo?