



## Auxiliar 14: Cadenas de Markov

Miércoles 13 de Mayo de 2009

### Problema 1

Armijo, el colectivo de su barrio, le pide que lo asesore en el desarrollo de un nuevo proyecto de su microempresa de transporte de pasajeros, con el fin de definir la tarifa a cobrar.

Nuestro amigo cuenta con 2 vehículos con los que pretende implementar un servicio de arriendo de autos.

A las 8 de la mañana de cada día él conocerá la demanda por arriendos, la cual sigue la siguiente ley de probabilidades.

$$Pr[D = 0] = 0.4, \quad Pr[D = 1] = 0.2 \text{ y } Pr[D \geq 2] = 0.4.$$

Un auto es arrendado por todo el día, es decir, con cada vehículo se puede atender a lo más un cliente diario.

Dada la apariencia apacible de Armijo, los clientes abusan de su buena voluntad, por lo que se estima que con probabilidad  $p = 0.7$  maltratarán el automóvil durante su uso, por lo que nuestro atribulado colectivo deberá llevarlo a mantención el día siguiente, y no podrá arrendarlo. La mantención demora exactamente un día, independiente del número de autos a reparar y tiene un costo de \$10.000 por vehículo.

Con el fin de ayudar a nuestro querido Armijo se pide que responda:

1. Justifique por qué es posible modelar como una cadena de Markov en tiempo discreto el número de vehículos disponibles al comienzo de un día cualquiera
2. Modele la situación descrita como una cadena de Markov en tiempo discreto. Dibújela con los respectivos estados, encuentre la matriz de transición y clasifique los estados en clases.

### Problema 2

Considere un jugador que apuesta sucesivas veces en el mismo juego. En cada jugada existe una probabilidad  $p$  de ganar una unidad y una probabilidad  $1 - p$  de perder una unidad. Se asume que las jugadas sucesivas son independientes. El jugador comienza con una cantidad de  $i$ ,  $1 < i < N$  y juega hasta que pierde todo o llega a  $N$ .

1. Construya una cadena de Markov que describa la fortuna del jugador en cada instante. Incluya las probabilidades de transición.
2. El jugador al llegar a  $N$  cambia su estrategia y decide apostar doble o nada, de manera que con probabilidad  $p$  su riqueza es  $2N$  (y se retira), mientras con probabilidad  $1 - p$  pierde todo (y su riqueza se reduce a cero). Modele esta nueva situación.
3. Si en la situación de la parte (a), la probabilidad de ganar es  $p = 1/2$ , ¿De qué depende que nuestro jugador finalmente gane o pierda?. Sin hacer cálculos entregue valores específicos cuando se pueda e interprete sus resultados.
4. Resuelva el problema para el caso general, es decir, encuentre las probabilidades de terminar ganando o perdiendo el juego si se empieza con una cantidad de  $i$ ,  $1 < i < N$ . Se juega hasta que pierde todo o llega a  $N$ , con  $p \neq (1 - p)$ .

5. Suponga que usted ha sido contratado como el nuevo Ayudante de Investigación Operativa y le toca corregir la P2 del control 2. Su estilo de corregir las pruebas de sus  $M$  alumnos es muy particular. Comienza tomando la prueba del alumno 1. Se sabe que cada vez que toma la prueba del alumno  $i$ , con  $1 \leq i \leq M - 1$ , existe una probabilidad  $p \in [0, 1]$  de avanzar a la prueba del alumno  $i + 1$  y una probabilidad  $(1 - p)$  de devolverse a la prueba del alumno  $i - 1$ . La primera vez que toma la prueba de un alumno usted le asigna, independiente de todo lo demás, y con probabilidad  $q_j$ , una nota  $j \in \{2.0, 3.0, \dots, 7.0\}$ . Cada vez que vuelve a pasar por la prueba de un alumno le baja una décima (la nota *puede ser negativa*). Si llega a la prueba del alumno  $M$ , le pone la nota correspondiente y el proceso de corrección termina. Por otro lado, si está en la prueba del alumno 1 y “se devuelve” entonces a todos los alumnos que no les ha puesto nota todavía les pone un 1.0 y finaliza la corrección.
  - a) (1.0 pto) Modele el *paso de una prueba a otra* como una Cadena de Markov <sup>1</sup>. Dibuje el grafo correspondiente, identifique las clases y clasifique sus estados.
  - b) (0.5 ptos) Calcule la probabilidad de que el alumno  $M$  obtenga una nota estrictamente superior a 1.0 en la P2 del Control 2.
  - c) (1.0 pto) Calcule la nota esperada del alumno  $M$  en la P2 del Control 2.

### Problema 3

Considere una tienda que distribuye un único producto, muy exclusivo, a  $N$  clientes. Para otorgarles un buen nivel de servicio mantiene unidades de este producto almacenadas, siendo administradas mediante un Sistema de Revisión Periódica Mensual.

De esta manera al comenzar cada mes la tienda revisa el nivel de inventario,  $n$ , que considera las existencias en la tienda, y pide a su proveedor una cantidad  $T - n$  de unidades ( $0 \leq n \leq T$ ), donde  $T$  corresponde al nivel de inventario objetivo ( $T \leq N$ ). La cantidad pedida demora exactamente un mes en llegar, es decir, estará disponible al comienzo del siguiente mes (antes de hacer el pedido).

1. (1.0 ptos.) Suponga que, independiente de todo, cada cliente mensualmente puede demandar sólo una unidad del producto, y que lo hace con probabilidad  $p$ . ¿Con qué probabilidad la tienda ve una demanda mensual igual a  $k$  unidades? Llame a esta probabilidad  $\alpha_k$  ( $0 \leq k \leq N$ ).
2. (1.0 ptos.) Si el nivel de inventario al inicio de un mes es de  $n$  unidades, ¿en qué estados se podrá encontrar el sistema al inicio del siguiente mes? ¿qué probabilidades tienen asociadas las transiciones posibles?

**Indicación:** Considere que la demanda insatisfecha se pierde.

3. (1.0 ptos.) Utilizando las probabilidades calculadas en las partes anteriores, modele el nivel de inventario de la tienda al comienzo de cada mes como una Cadena de Markov. Identifique claramente los estados y las probabilidades de transición.

Suponga ahora que con probabilidad  $q$  la cantidad pedida en un mes cualquiera requiere un mes adicional para su llegada a la tienda.

4. (0.5 ptos.) ¿Qué información adicional debe incorporarse a los estados definidos anteriormente para representar el nuevo escenario del sistema como una Cadena de Markov?
5. (1.5 ptos) Para el nuevo escenario, modele el sistema al comienzo de cada mes como una Cadena de Markov. Identifique claramente los estados y las probabilidades de transición.

---

<sup>1</sup>Para esta modelación no debe considerar las probabilidades  $q_j$ .