

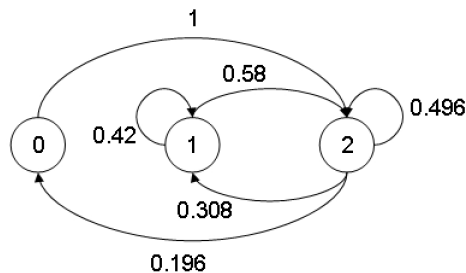


Auxiliar 14: Cadenas de Markov

Miércoles 13 de Mayo de 2009

Problema 1

1. Es posible dado que el número de autos disponibles al comienzo de un día cualquiera sólo depende de la cantidad de autos disponibles al comienzo del día anterior y esto es suficiente para determinar la evolución del sistema (en probabilidades).
2. La cadena toma se muestra en la figura.



Cálculo de las probabilidades de transición:

$$P_{0,2} = 1 \quad (\text{Si no tengo taxis disponibles con seguridad ambos estarán disponibles mañana}).$$

$$P_{1,2} = [P(D=1) + P(D \geq 2)] \cdot P[\text{No falle}] + P(D=0) = 0,58$$

$$P_{1,0} = 0 \quad (\text{Por lo menos tengo bueno, la mañana siguiente, el auto en reparación})$$

$$P_{1,1} = 1 - 0,58 = 0,42$$

$$P_{2,0} = P(D \geq 2) \cdot P[\text{Ambos autos fallen}] = 0,196$$

$$P_{2,1} = P(D=1) \cdot P[\text{Auto falle}] + 2 \cdot P(D \geq 2) \cdot P[\text{Uno falla y el otro no}] = 0,308$$

$$P_{2,2} = P(D=0) + P(D=1) \cdot P[\text{Auto no falle}] + P(D \geq 2) \cdot P[\text{No falle ninguno}] = 0,496$$

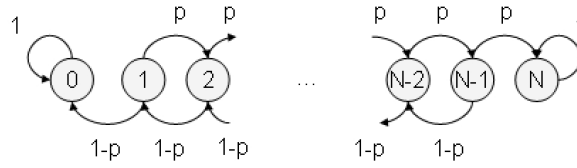
Entonces la matriz de transición es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,42 & 0,58 \\ 0,196 & 0,308 & 0,496 \end{vmatrix}$$

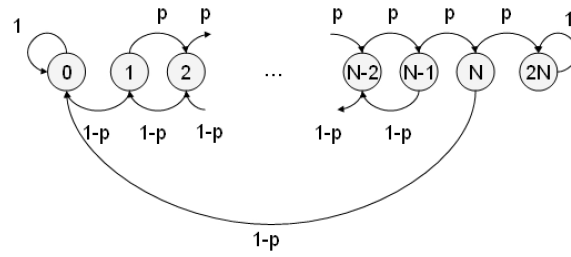
Existe sólo una clase recurrente aperiódica compuesta por todos los estados de la cadena.

Problema 2

1. La cadena es la siguiente:



2. La cadena es la siguiente:



3. Sea:

$$f_i = P[\text{Ganar dado que parto con } i \text{ unidades}]$$

Inmediatamente vemos que $f_0 = 0$ y que $f_N = 1$. De la misma forma vemos (condicionando en el resultado de la primera apuesta) que:

$$f_i = \frac{1}{2}f_{i+1} + \frac{1}{2}f_{i-1} \quad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = f_i - f_{i-1} \quad \forall 0 < i < N$$

La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = f_1$$

Ahora si sumamos las $N - 1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$f_N - f_1 = (N - 1) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{N}$$

De la misma forma si sumamos las $i - 1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = i \cdot f_1 = \frac{i}{N}$$

4. Para el caso general procederemos exactamente como lo hicimos para el caso particular:

$$f_i = p \cdot f_{i+1} + (1-p) \cdot f_{i-1} \quad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = \rho(f_i - f_{i-1}) \quad \forall 0 < i < N$$

Donde $\rho = \frac{1-p}{p}$ La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = \rho f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = \rho^{i-1} f_1$$

Ahora si sumamos las $N-1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$f_N - f_1 = \left(\sum_{i=1}^{N-1} \rho^i \right) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} \rho^i} = \frac{1-\rho}{1-\rho^N}$$

De la misma forma si sumamos las $i-1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \rho^k \right) \cdot f_1 = \frac{1-\rho^i}{1-\rho^N}$$

5. a) Una forma es modelar exactamente como la ruina del jugador con fortuna M y estados absorbentes 0 y M . Al estado 0 se llega cuando Ud., el auxiliar, está en la primera prueba y “se devuelve”. En este caso hay 3 clases: $\{0\}, \{M\}$ recurrentes y la clase $\{1, 2, \dots, M-1\}$ que es una clase transiente.
- b) Claramente, la única forma de que el alumno M obtenga nota superior a 2.0 es que Ud. alcance acorregir la prueba de ese alumno.

Dada la analogía a la ruina del jugador que estamos haciendo, se puede usar (o deducir) la fórmula para f_1 : Probabilidad de llegar a estado M , dado que partí en estado 1, en los casos $p = \frac{1}{2}$ y $p \neq \frac{1}{2}$.

$$f_1 = \begin{cases} \frac{1}{M} & p = \frac{1}{2} \\ \frac{1-\frac{1-p}{p}}{1-\frac{1-p}{p}^M} & p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

- c) Condicionaremos en la última prueba corregida por el auxiliar:

$$\begin{aligned} E(\text{Nota } M) &= E(\text{Nota/ultima es 1}) \cdot \mathbb{P}(\text{ultima es 1}) + E(\text{Nota/ultima es } M) \cdot \mathbb{P}(\text{ultima es } M) \\ &= 1 \cdot \mathbb{P}(\text{ultima es 1}) + E(\text{Nota asignada}) \cdot \mathbb{P}(\text{ultima es } M) \\ &= (1 - f_1) + \left(\sum_{j=2}^7 j \cdot q_j \right) \cdot f_1 \end{aligned}$$

Problema 3

1. Como cada cliente puede demandar sólo una unidad del producto y lo hace con probabilidad p , la demanda mensual puede ser descrita con una distribución Binomial(N, p). Por lo tanto:

$$P[\text{Demanda} = k] = \alpha_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}$$

2. Si el nivel de inventario al inicio de un mes es de n unidades la tienda pide $T - n$ unidades, las que llegan al inicio del siguiente mes. No obstante, durante el mes el nivel n se ve reducido por la demanda que observa la tienda. De esta manera, si la demanda en el mes es de k unidades, al inicio del siguiente mes el nivel de inventario será $\max\{n - k, 0\} + (T - n)$ unidades. Notamos que a lo más puedo vender la cantidad que está en inventario (no existen ventas pendientes).

Sea P_{ij} La probabilidad de comenzar un mes con j unidades si al comienzo del mes anterior tenía i unidades en inventario. Entonces $\forall i, j \in \{0, \dots, T\}$

$$P_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < T - i \\ \alpha_{i+} = \sum_{k=i}^T \alpha_k & \text{si } j = T - i \\ \alpha_{T-j} & \text{si } j > T - i \end{cases}$$

3. Para identificar la cadena de Markov simplemente necesitamos especificar cuales son los estados de la misma e identificar la matriz de transición. Claramente los estados son:

$$X_i = \text{Inventario al comienzo del mes es de } i \text{ unidades} \quad i \in \{0, \dots, T\}$$

Es decir $T+1$ estados. Las componentes de la matriz de transición son las calculadas en el punto anterior.

Otra forma de especificar la cadena era bosquejar el grafo asociado. Sin embargo para que dicho grafo se encuentre completamente correcto debe incluir una transición genérica entre los estados i y j .

Esta Cadena de Markov es finita y está definida por una única clase recurrente aperiódica (ergódica e irreducible). Para ver esto notamos que desde el estado x_T podemos acceder a cualquier otro estado y que desde cada estado puedo acceder a x_T (entonces existe solo una clase). Vemos que es aperiódico puesto que la transición desde x_T a x_T tiene probabilidad no nula.

4. Debemos incluir información acerca si existen pedidos que no llegaron al comienzo del mes en cuestión. Más aun debemos incluir cuantos productos no llegaron debido a un retraso y que por lo tanto se encontraran con seguridad disponibles al comienzo del próximo mes..
5. Para identificar la cadena de Markov debemos especificar los estados de la misma e identificar la matriz de transición asociada. Los estados son:

$$x_{i,j} = \begin{matrix} i \text{ unidades al comienzo del mes en bodega y } j \text{ unidades} \\ \text{llegaran con seguridad al comienzo del próximo mes} \end{matrix} \quad \forall i, j \in \{\mathbb{N}^2 | j + i \leq T\}$$

En este caso los elementos de la matriz de transición toman la siguiente forma ($i, j, l, k \in \mathbb{N} \quad |i + j \leq T \wedge l + k \leq T$)

$$P_{(i,j)(k,l)} = \begin{cases} 0 & \text{si } (k < T - i \wedge l = 0) \vee (k < j \wedge l = T - i - j) \\ & \vee (l \neq T - i - j \wedge l \neq 0) \\ q \cdot \alpha_{i+} = & \text{si } k = j \wedge l = T - i - j \\ (1 - q) \cdot \alpha_{i+} = & \text{si } k = T - i \wedge l = 0 \\ q \cdot \alpha_{i+j-k} & \text{si } k < j \wedge l = T - i - j \\ (1 - q) \cdot \alpha_{T-k} & \text{si } k < T - i \wedge l = 0 \end{cases}$$