Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profesor: José Correa, Rafael Esptein
Prof. Aux.: J. Gacitúa, C. Thraves, R. Lagos, S. Astroza

Pauta Control 1

Lunes 20 de Abril de 2009

Problema 1.

(a) Definimos: A: Se lanza dado A. B: Se lanza dado B. X_i: Color de la cara obtenida en el lanzamiento "i".

$$X_i = \begin{cases} N & \text{negro} \\ B & \text{blanco} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P[X_n = N] &= P[X_n = N \,/\, A]P[A] + P[X_n = N \,/\, B]P[B] \\ &= \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{8}{12} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P[X_n = N \wedge X_{n+1} = N] &= P[X_n = N \wedge X_{n+1} = N \,/\, A] + P[X_n = N \wedge X_{n+1} = N \,/\, B] \\ &= P[X_n = N \,/\, A]\cdot P[X_{n+1} = N \,/\, A] + P[X_n = N \,/\, B]\cdot P[X_{n+1} = N \,/\, B] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{17}{36} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = N \,/\, \bigcap_{i=1}^{n} X_i = N] &= \frac{P[\bigcap_{i=1}^{n+1} X_i = N]}{P[\bigcap_{i=1}^{n} X_i = N]} \\ &= \frac{P[\bigcap_{i=1}^{n+1} X_i = N \,/\, A]\cdot P[A] + P[\bigcap_{i=1}^{n+1} X_i = N \,/\, B]\cdot P[B]}{P[\bigcap_{i=1}^{n} X_i = N \,/\, A]\cdot P[A] + P[\bigcap_{i=1}^{n} X_i = N \,/\, B]\cdot P[B]} \\ &= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}} \end{aligned}$$

Tomando límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{6}\right)^{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n}} \quad = \quad \frac{5}{6}$$

Problema 2.

(a) Notemos que en el caso que hay empate, la mejor estratehia posterior es ir con una estrategia Agresiva, ya que la probabilidad de ganar es 0.45 en este caso, mientra que ir de manera Defensiva, sólo da paso para obtener a lo más un empate. Por ende es claro que el problema ya no es infinito, y en caso de empate en el segundo partido, la probabilidad de ganar el campeonato es de 0.45.

(b) Hacemos el árbol de decisión, donde las utilidades corresponden a la probabilidad de ganar el campeonato, para ser consecuentes con el cálculo de que el valor esperado de la mejor estrategia, corresponda a la probabilidad de gnar el campeonato. El árbol es el siguiente:

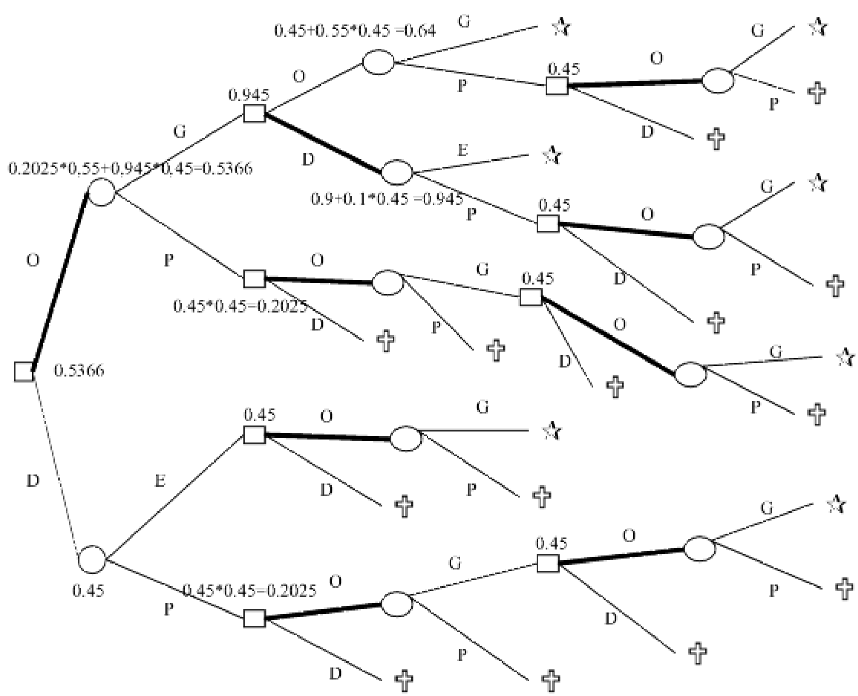

Figura 1: Árbol problema 2

Notación:

- D = Jugar el partido defensivamente, O = Jugar el partido ofensivamente o agresivamente (A)
- G = Ganar 1 partido, E = Empatar 1 partido, P = Perder 1 partido

Luego, la probabilidad de ganar el campeonato contra Deep Blue es de 0.536

Problema 3.

(a) La estrategia seria la siguiente: En la primera hora hornear los pernos 1 y 2, en la segunda hora los pernos 1 y 3, y en la tercera hora los pernos 2 y 3. Luego, con sólo 3 horas, ha sido suficiente para hornear los 3 pernos con capacidad para 2 pernos.

(b) Note que se requiere de $d \cdot n$ horas en total para hornear a todos los pernos si el horno tuviese capacidad 1. Sin embargo, dado que el horno tiene una capacidad de k, entonces se pueden hornear los pernos en $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ grupos, cada uno con a lo más k pernos (todos con exactamente k excepto posiblemente el último grupo). Cada grupo pasará d horas en el horno por lo que en total tenemos la cota superior de $d \cdot \lceil \frac{n}{k} \rceil$.

(c) Modelo del problema:

- **Etapas**:
  Horas utilizadas, $t : 1, ..., d \cdot \lceil \frac{n}{k} \rceil$.
- **Variables de estado**:
  $$\begin{pmatrix} n_0^t \\ n_1^t \\ \vdots \\ n_d^t \end{pmatrix},$$
  con n_j^t = número de pernos que han sido horneados por j horas hasta la hora t.
- **Variables de decisión**:
  $$\begin{pmatrix} a_0^t \\ a_1^t \\ \vdots \\ a_{d-1}^t \end{pmatrix},$$
  con a_l^t = número de pernos que horneo para pasar de tener l horas horneadas a *l+1* al principio de la hora t.
- **Recurrencia de estados**:
  $$n_0^{t+1} = n_0^t - a_0^t$$
  $$n_j^{t+1} = n_j^t - a_j^t + a_{j-1}^t \forall j \in \{1, \ldots, d-1\}$$
  $$n_d^{t+1} = n_d^t + a_{d-1}^t$$
- **Función de costo**:
  $$V^t(n_0^t, n_1^t, \ldots, n_d^t) = 1 + \min_{0 \leq a_j^t \leq n_j^t \text{ for } 0 \leq j \leq d, \sum_{j=0}^{d-1} a_j^t \leq k} V^{t+1}(n_0^t - a_0^t, n_1^t - a_1^t + a_0^t, \ldots, n_d^t + a_{d-1}^t)$$
- **Condiciones de borde**:
  $$V^t(0, 0, \ldots, 0, n) = 0, \text{ for all } 0 \leq t \leq d\lceil n/k \rceil$$
  $$n_0^0 = n, \quad n_j^0 = 0 \,\forall j \in \{1, \ldots, d\}$$