



Pauta Auxiliar 12

Martes 5 de Mayo de 2009

Pregunta 1

A una heladería, en la que trabaja un solo heladero, llegan grupos de clientes según un proceso de Poisson de tasa λ [grupos/hora]. Un grupo puede estar compuesto por 1 persona, 2 personas o 3 personas, con probabilidad p , q y $1 - p - q$, respectivamente. La heladería abre a las 10 horas y cierra a las 20 horas. El tiempo de atención es despreciable. Todos los clientes que entran a la heladería compran exactamente un helado.

Calcule la probabilidad que:

Para todas las partes, considerar $r = 1 - p - q$

1. (0,5 puntos) Lleguen n grupos de personas entre las 11 y las 12 horas.
El proceso de llegada de grupos $\{N(t), t \geq 0\}$ es un PPH, luego

$$P(N(12) - N(11) = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

2. (0,5 puntos) El primer helado sea vendido antes de las h horas.
Buscamos que el tiempo para la primera llegada, X_1 , sea menor o igual a h . Como estamos frente a un PPH,

$$P(X_1 \leq h) = 1 - e^{-\lambda h}$$

3. (0,5 puntos) Lleguen exclusivamente dos parejas entre las 10 y 11 horas.
Sea, $\{N_i(t), t \geq 0\}$ PPH que representa el proceso de llegada de grupos de tamaño $i = 1, 2, 3$. Buscamos entonces,

$$\begin{aligned} P(N_2(1) = 2 \wedge N_1(1) = 0 \wedge N_3(1) = 0) &= P(N_2(1) = 2) \cdot P(N_1(1) = 0) \cdot P(N_3(1) = 0) \\ &= \frac{(q\lambda)^2 e^{-q\lambda}}{2!} \cdot e^{-(1-q)\lambda} \\ &= \frac{(q\lambda)^2 e^{-\lambda}}{2!} \end{aligned}$$

4. (1 punto) No lleguen grupos de un solo integrante entre las 10 y las 12 horas.
Se pide,

$$P(N_1(12) - N_1(10) = 0) = e^{-2 \cdot p\lambda}$$

5. (1 punto) Se hayan vendido exactamente 3 helados entre las 16 y 17 horas. Existen 3 formas para que se cumpla lo pedido:

- Llegue 1 grupo de una persona, 1 grupo de dos personas y 0 grupos de 3 personas.

$$P_1 = p\lambda e^{-p\lambda} \cdot q\lambda e^{-q\lambda} \cdot e^{-r\lambda} = pq\lambda^2 e^{-\lambda}$$

- Llegue 1 grupo de 3 personas y 0 grupos de otro tamaño.

$$P_2 = r\lambda e^{-r\lambda} e^{-(p+q)\lambda} = r\lambda e^{-\lambda}$$

- Lleguen 3 grupos de 1 persona y 0 grupos de otro tamaño.

$$P_3 = \frac{(p\lambda)^3 e^{-p\lambda}}{3!} e^{-(q+r)\lambda} = \frac{(p\lambda)^3 e^{-\lambda}}{3!}$$

La probabilidad buscada es entonces,

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

6. (1 punto) Calcule el valor esperado del número de helados vendidos durante el día, dado que durante las primeras h horas se vendieron k helados. ($h \leq 10$).

El valor esperado buscado es, Durante las primeras h horas ya sabemos que fueron k helados vendidos, lo único variable es lo que se podría vender desde las h horas hasta las 10 horas de operación, lo cual es independiente del pasado. El valor buscado es entonces,

$$\begin{aligned} E[\text{Ventas} | k \text{ helados en las primeras } h \text{ horas}] &= k + E[N_1(10-h) + 2 \cdot N_2(10-h) + 3 \cdot N_3(10-h)] \\ &= k + E[N_1(10-h)] + 2E[N_2(10-h)] + 3E[N_3(10-h)] \\ &= k + \lambda \cdot (p + 2q + 3r) \cdot (10-h) \end{aligned}$$

Considere ahora que el tiempo de atención de cada cliente, por parte del heladero, se distribuye exponencialmente con parámetro μ [1/hora]. Si al llegar un grupo el heladero está ocupado, estos clientes se retiran porque no están dispuestos a esperar.

7. (1,5 puntos) Calcule el valor esperado del número de ventas perdidas que tendrá la heladería por cada grupo que atiende el heladero.

Condicionamos sobre el tamaño del primer grupo que llega a la heladería al estar desocupada,

$$E[\text{Ventas perdidas}] = \sum_{i=1}^3 E[\text{Ventas Perdidas} | \text{Llegó grupo de tamaño } i] \cdot P(\text{llegó grupo de tamaño } i)$$

Donde,

- $P(\text{llegó grupo de tamaño } 1) = \frac{p\lambda}{p\lambda + q\lambda + r\lambda} = p$
- $P(\text{llegó grupo de tamaño } 2) = \frac{q\lambda}{p\lambda + q\lambda + r\lambda} = q$
- $P(\text{llegó grupo de tamaño } 3) = \frac{r\lambda}{p\lambda + q\lambda + r\lambda} = r$

El término restante se calcula condicionando sobre el tiempo total de atención del heladero. Sea X v.a. que representa el tiempo que tarda el heladero en atender a una persona ($X \sim \exp(\mu)$).

Sea,

$$\begin{aligned} \theta = E[\text{Ventas Perdidas} | \text{se atiende a 1 persona}] &= \int_{x=0}^{\infty} E[N_1(X) + 2N_2(X) + 3N_3(X) | X = x] \cdot f_X(x) dx \\ &= \int_{x=0}^{\infty} E[N_1(x)] f_X(x) dx + 2 \int_{x=0}^{\infty} E[N_2(x)] f_X(x) dx + 3 \int_{x=0}^{\infty} E[N_3(x)] f_X(x) dx \\ &= \int_{x=0}^{\infty} (p\lambda x) f_X(x) dx + 2 \int_{x=0}^{\infty} (q\lambda x) f_X(x) dx + 3 \int_{x=0}^{\infty} (r\lambda x) f_X(x) dx \\ &= \frac{\lambda}{\mu} (p + 2q + 3r) \end{aligned}$$

El tiempo de atención por persona es independiente el uno del otro, y el proceso de llegada de clientes es Poissoniano, luego para un grupo de i personas, se perderán $i\theta$ clientes en términos esperados. Finalmente,

$$E[\text{Ventas perdidas}] = p\theta + 2q\theta + 3r\theta = \frac{\lambda}{\mu} (p + 2q + 3r)^2$$

Pregunta 2

Recordar que si tenemos un proceso de Poisson no homogéneo en que la tasa de ocurrencia depende del tiempo $\lambda(t)$, hacemos un cambio de reloj para ver el proceso como uniforme:

$$u(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \Rightarrow P(N(t_2) - N(t_1) = k) = \frac{u(t_1, t_2)^k e^{-u(t_1, t_2)}}{k!}$$

Para este problema:

$$\begin{aligned} u(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{14,1-t}} dt \\ &= -2\sqrt{14,1-t} \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= 2\sqrt{14,1-t_1} - 2\sqrt{14,1-t_2} \quad (0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 14,1) \end{aligned}$$

1.

$$\begin{aligned} P(N(9, 10) = 0 \wedge N(10, 11) \geq 1) &= P(N(9, 10) = 0)P(N(10, 11) \geq 1) \\ &= P(N(9, 10) = 0)(1 - P(N(10, 11) = 0)) \\ &= u(9, 10)^0 e^{-u(9, 10)} (1 - u(10, 11)^0 e^{-u(10, 11)}) \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} u(9, 10) &= 2(\sqrt{5,1} - \sqrt{4,1}) \\ &= 0,467 \\ u(10, 11) &= 2(\sqrt{4,1} - \sqrt{3,1}) \\ &= 0,528 \end{aligned}$$

Entonces:

$$P(N(9, 10) = 0 \wedge N(10, 11) \geq 1) = e^{-0,467} (1 - e^{-0,528})$$

2. (12 min=0.2 hr). Los clientes que están en el banco en t son los que han llegado entre $t - 0,2$ y t . Así:

$$\begin{aligned} E(N(t - 0,2; t)) &= u(t - 0,2; t) \\ &= 2[\sqrt{14,1 - (t - 0,2)} - \sqrt{14,1 - t}] \end{aligned}$$

3. Los que llegan después de las 14:00

$$\begin{aligned} E(N(14; 14,1)) &= 2[\sqrt{0,1} - \sqrt{0}] \\ &= 2\sqrt{0,1} \end{aligned}$$

Para que disminuya a la mitad:

$$\begin{aligned} E(N(x; 14,1)) &= \frac{1}{2} (2\sqrt{0,1}) \\ 2[\sqrt{14,1 - x} - \sqrt{0}] &= \sqrt{0,1} \\ \Rightarrow x &= 14,075 \end{aligned}$$

Problema 3, CTP 3 primavera 2007

Notacin:

$N_A(t)$: N de contenedores de la empresa A que han llegado hasta t (PPH de tasa λ_A).

$N_O(t)$: N de contenedores de otros clientes que han llegado hasta t (PPH de tasa λ_O).

$N(t)$: N total de contenedores que han llegado hasta t (PPH de tasa $\lambda = \lambda_A + \lambda_O$).

$S_O(n)$: Instante de llegada del n -ésimo contenedor que no es de A ($\text{Gamma}(n, \lambda_O)$).

1. Claramente el número de contenedores de la empresa A, dado que han llegado n contenedores en total, sigue una distribución Binomial de parámetros n y $\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_O}$, (que corresponde a la probabilidad de que un contenedor de la empresa A llegue antes que un contenedor de otro cliente). Entonces,

$$p_k(n) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_O} \right)^k \cdot \left(\frac{\lambda_O}{\lambda_A + \lambda_O} \right)^{n-k}$$

2. Se distinguen dos casos para m ,

Caso 1: $m \leq N$

En este caso todos los contenedores pueden ser de la empresa A o no. Luego, $q_k(m) = p_k(m)$ $0 \leq k \leq m$

Caso 2: $m > N$

Ahora por lo menos $m - N$ contenedores pertenecen a la empresa A y el resto debe calcularse utilizando los resultados de la parte anterior. Luego,

$$q_k(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq k < m - N \\ \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_O} \right)^k \cdot \left(\frac{\lambda_O}{\lambda_A + \lambda_O} \right)^{n-k} & \text{si } m - N \leq k \leq m \end{cases}$$

3. Se distinguen dos casos para m ,

Caso 1: $m < N$

$$P(\text{despachar } m) = P(N(3) = m) = \frac{(3 \cdot \lambda)^m \cdot e^{-3 \cdot \lambda}}{m!}$$

Caso 2: $m \geq N$

$$\begin{aligned} P(\text{despachar } m) &= \sum_{k=0}^{N-1} P(N_A(3) = m - k \wedge N_O(3) = k) + P(N_A(3) = m - N \wedge N_O(3) \geq N) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(3 \cdot \lambda_A)^{m-k} \cdot e^{-3 \cdot \lambda_A}}{(m-k)!} \cdot \frac{(3 \cdot \lambda_O)^k \cdot e^{-3 \cdot \lambda_O}}{k!} + \frac{(3 \cdot \lambda_A)^{m-N} \cdot e^{-3 \cdot \lambda_A}}{(m-N)!} \cdot \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(3 \cdot \lambda_O)^k \cdot e^{-3 \cdot \lambda_O}}{k!} \end{aligned}$$

4. Hay que calcular el beneficio y los costos por embarque. El beneficio entre embarques depende del número de contenedores despachados. Luego,

$$E[B] = \sum_{m=0}^{\infty} E[B|m \text{ despachados}] \cdot P(\text{despachar } m)$$

Se debe condicionar en el número de contenedores de la empresa A

$$E[B|m \text{ despachados}] = \sum_{m=0}^m E[B|k \text{ de empresa A}|m] \cdot q_k(m)$$

Finalmente,

$$E[B|k \text{ de empresa A}|m] = B_A \cdot k + B_O \cdot (m - k)$$

Para calcular los costos, consideremos que dado que un cliente cualquiera (que no es la empresa A) llegó entre embarques, debe condicionarse en el instante t de llegada. Si llega en t , el tiempo que ha transcurrido desde el último embarque será obviamente t . El cliente se perderá si ya han llegado N o más clientes distintos de A a la bodega en el instante en que llega. Con esto, la probabilidad de perder a dicho cliente

será

$$P(\text{perder cliente} | \text{llego en } t) = P(S_O(N) < t) = \int_0^t \frac{\lambda_O^N \cdot t^{N-1} \cdot e^{-\lambda_O \cdot t}}{(N-1)!} dt$$

Dado que llegó entre embarques, se tiene que:

$$P(\text{perder cliente}) = \int_0^3 P(\text{perder cliente} | \text{llego en } t) \cdot \frac{1}{3} dt$$

Finalmente, la utilidad diaria esperada será:

$$E[U] = E[B] - C \cdot E[\text{clientes perdidos}]$$

Para calcular el número esperado de clientes perdidos, basta con considerar el proceso filtrado de llegadas de contenedores que no son de A y que se perderán. Luego,

$$E[\text{clientes perdidos}] = P(\text{perder cliente}) \cdot \lambda_O \cdot 3$$

Otra forma es condicionar en el número de llegadas de clientes entre embarques, obteniendo una distribución Binomial. Luego,

$$\begin{aligned} E[\text{clientes perdidos}] &= \sum_{k=0}^{\infty} E[\text{clientes perdidos} | n] \cdot P(N_O(3) = n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [n \cdot P(\text{perder cliente})] \cdot P(N_O(3) = n) \\ &= P(\text{perder cliente}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} n \cdot P(N_O(3) = n) \\ &= P(\text{perder cliente}) \cdot \lambda_O \cdot 3 \end{aligned}$$