



## Auxiliar 11: Procesos de Poisson

Miércoles 29 de Abril de 2009

### Problema 1, Control 2 Otoño 2004

1. (1,5 ptos.) Pasajeros llegan a un estación de Metro según un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  [personas/hora]. El tiempo entre los arribos de los trenes es de  $t$  [horas] y su capacidad es tal que puede llevar a todos los pasajeros esperando. Si acaba de pasar un tren y la estación está vacía:
  - a) Calcule la esperanza de la suma de los tiempos de espera de los pasajeros que subirán al siguiente tren.
  - b) ¿Cómo cambia su respuesta de la parte anterior si los trenes llegan a la estación según un Proceso de Poisson de tasa  $\mu$  [trenes/hora]?
2. (1,5 ptos.) Considere una intersección que tiene  $I$  calles que llegan a ella. La llegada de autos provenientes de la calle  $i$  sigue un Proceso de Poisson de tasa  $\lambda_i$ . Cada auto que viene de la calle  $i$ , independiente de todo el resto, tomará la calle  $j$  con una probabilidad  $P_{ij}$ . Sea  $B_j(t)$  el número de autos que han tomado la calle  $j$  desde la intersección hasta el instante  $t$ . Suponiendo que el tiempo que tardan los autos en cruzar la intersección una vez que llegan a ella es despreciable, entregue expresiones para  $P[B_j(t) = k]$  y la esperanza de  $B_j(t)$ .

### Problema 2, Examen Otoño 2005

Usted acaba de ser contratado por el departamento de estudios de una importante empresa de retail chilena, con el fin implementar un sistema de subastas en el sitio web de la empresa, y así vender mediante este mecanismo productos tecnológicos exclusivos.

Usted ya ha determinado cómo se debe implementar el sistema: los clientes entrarán a la página de la empresa (sección subasta), elegirán el producto por el que quieren ofertar y luego ingresarán el monto por el cual desean comprar el artículo en cuestión. Además podrán monitorear en línea el estado de la subasta y hacer contraofertas.

A continuación estudiaremos el proceso de venta de un artículo en particular. Para determinar las ganancias potenciales del método de venta, usted realiza los siguientes supuestos:

- Las personas acceden a la página de la empresa de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$  [personas/hora].
- Las personas están dispuestas a gastar una cantidad  $x$  en la compra del artículo. Esta cantidad  $x$  es una variable aleatoria continua de distribución  $F$  (conocida), común para todas las personas (e independientes entre sí).
- Las personas ofertan la cantidad mínima que les asegura llevarse (momentáneamente) el artículo. Considerando que la subasta es monitoreada en tiempo real, si llegase a subir el precio del artículo en la subasta, una persona igualará la oferta de inmediato (subirá el precio en una cantidad despreciable), siempre y cuando no supere su disposición a pagar  $x$ .
- La subasta comienza con un precio inicial 0.

- La subasta dura exactamente  $T$  horas.
- La persona que hizo la mejor oferta se lleva el producto pagando por él un valor igual al de su oferta.

Bajo estos supuestos notamos que la persona que se lleva finalmente el artículo difícilmente estará pagando el máximo que hubiese estado dispuesto a pagar por él.

Considerando  $F \rightarrow U[0, 1]$  responda:

1. (1,0 ptos.) Si en el instante  $t$  el precio de la mejor oferta es  $P$ , ¿cuál es la probabilidad de que el artículo se venda finalmente a ese precio?
2. (1,0 pto.) Si en el instante  $t$  el precio de la mejor oferta es  $P$ , ¿cuál es la probabilidad de que el artículo se venda a quien hizo esa oferta?
3. (1,5 ptos.) ¿Cuál es la esperanza del precio de venta del artículo?
4. (1,5 ptos.) ¿Cuánto ahorra, en términos esperados, el cliente que gana la subasta (respecto a lo que hubiese estado dispuesto a pagar)?

### Problema 3, Control 2 Otoño 2005

El servicio de urgencias de un hospital ha detectado que el comportamiento de las llegadas de ambulancias a dicha unidad puede ser descrito como un proceso de Poisson no homogéneo. Respecto a la función de intensidad de este proceso se ha observado que el día se divide en dos horarios: “horario diurno” de 8:00 a 20:00, en que las ambulancias llegan a una tasa de 3 [ambulancias/hora], mientras que el “horario nocturno”, desde las 20:00 a las 8:00 del día siguiente, llegan a una tasa de 4 [ambulancias/hora].

1. (2,0 Ptos.) ¿Cuál es la probabilidad que, en un día cualquiera, en el intervalo entre las 18:00 y las 22:00, lleguen exactamente  $k$  ambulancias al servicio de emergencias?
2. (2,0 Ptos.) Suponga que desde las 8:00 de un día hasta las 8:00 del día siguiente ha venido apenas una ambulancia. ¿Cuál es la probabilidad que esta ambulancia haya llegado durante el “horario diurno”?