



Universidad de Chile  
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial

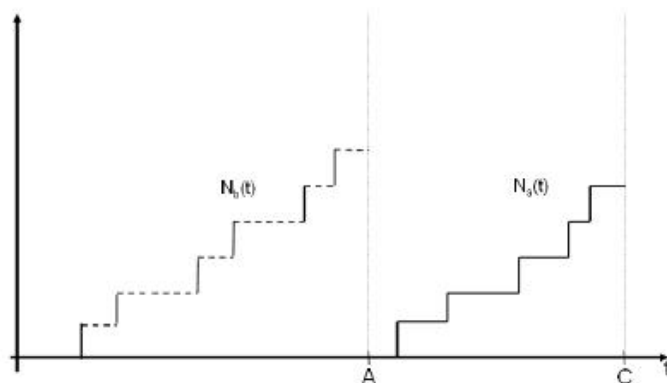
IN44A: Investigación Operativa  
Profs: J. Correa, R. Epstein  
Aux: Astroza, Gacitúa, Lagos, Thraves

Clase Auxilliary 10, 28 de Abril de 2009

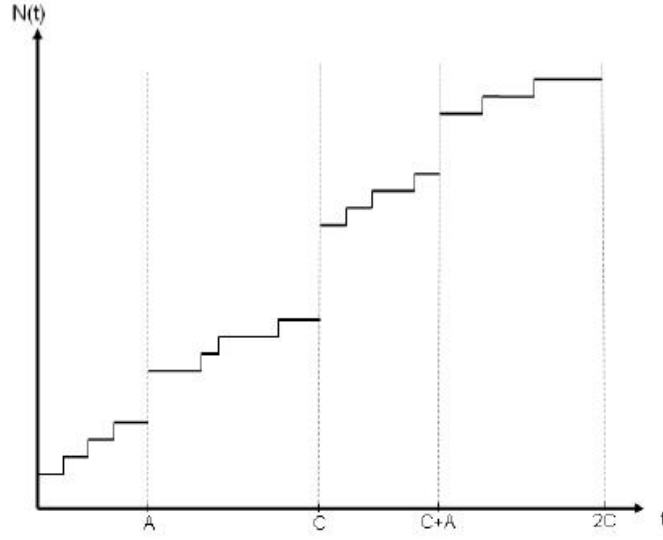
## Procesos de Poisson

### Problema 1

1. (1,0 pts) Sean  $\{N_a(t) : t \geq 0\}$ ,  $\{N_b(t) : t \geq 0\}$  y  $\{N_T(t) : t \geq 0\}$  los procesos de conteo asociados al número de autos que cruzan la calle a, la calle b y ambas, respectivamente. El diagrama de autos que cruzan la intersección (por una calle en particular) es la que se muestra en la figura a continuación:



Entonces la dinámica del total de autos que cruza por alguna de las calles es la siguiente:



Para calcular la distribución de los autos que cruzan la intersección en un ciclo hay que notar que, dada la definición del ciclo, cruzaran todos los autos que llegan por la calle a durante un tiempo  $C$  y todos los que llegan por la calle b en el mismo tiempo. Entonces  $N_a(C)$  sigue un proceso de Poisson de tasa  $\lambda_a$ , y  $N_b(C)$  sigue un proceso de Poisson de tasa  $\lambda_b$ . Por suma de procesos de Poisson es directo que  $N_T(C)$  sigue un proceso de Poisson de tasa  $(\lambda_a + \lambda_b)$ . Es importante notar que solo para intervalos de largo  $C$  se cumple esta propiedad (dado que solo en esos instantes han cruzado todos los autos que han llegado al cruce).

2. (1,0 pts) Cada uno de los autos que cruzó el ciclo (dada la respuesta a la pregunta (a)) tiene una probabilidad  $\frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b}$  de haber cruzado por la calle a. Para ver esto sólo basta pensar en que la llegada de autos por la calle a viene de la división del proceso de Poisson  $N_T(C)$  (de tasa  $\lambda_a + \lambda_b$ ) con probabilidad  $\frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b}$  (si multiplican la tasa y la prob. recuperan el proceso original). Entonces, dado que llegaron  $n$  tendre que:

$$P[N_a(C) = k | N_T(C) = n] = \binom{n}{k} \left( \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} \right)^k \cdot \left( \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} \right)^{n-k}$$

Es decir una distribución binomial de parámetros  $n$  y  $(\frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b})$ .

3. (1,0 pts) Veamos esto como un proceso de Poisson filtrado. Si un auto llega (por a) en el instante  $s$  (medido desde el comienzo del ciclo) tiene la siguiente probabilidad de haber esperado para cruzar:

$$P[s] = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq s < A \\ 1 & \text{si } A \leq s < C \end{cases}$$

Entonces independiente del instante de llegada, cada uno de estos  $N$  autos tiene una probabilidad  $p$  de haber tenido que esperar, donde:

$$p = \int_0^C \frac{P[s]}{C} ds = \int_0^A \frac{0}{C} ds + \int_A^C \frac{1}{C} ds = 1 - \frac{A}{C}$$

Donde se utilizó la distribución uniforme  $[0, C]$  de las llegadas condicionadas de un proceso de Poisson. Sea  $N(t)_{Ea}$  el número de autos que ha cruzado hasta  $t$  pero que ha debido esperar la luz

verde. Entonces tendremos que:

$$P[N(C)_{Ea} = k | N_a(C) = n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Es decir una distribución binomial de parámetros  $n$  y  $p$ .

4. (1,0 ptos) Sea  $N_{NE}(t)$  el número de autos que ha cruzado hasta  $t$  y que no espera luz verde para cruzar. Nuevamente veamos el cuento como un proceso de Poisson filtrado (en particular será muy parecido a lo que hicimos en la clase auxiliar).

Si un auto llega en el instante  $s$  (medido desde el comienzo del ciclo) tiene la siguiente probabilidad de cruzar inmediatamente.

$$P[s] = \begin{cases} \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} & \text{si } 0 \leq s < A \quad (\text{la probabilidad de llegar por a}) \\ \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} & \text{si } A \leq s < C \quad (\text{la probabilidad de llegar por b}) \end{cases}$$

Noten que estamos filtrando  $N_T(C)$ .

Entonces tendremos que la prob. descondicionada del instante de llegada será:

$$p = \int_0^C \frac{P[s]}{C} ds = \int_0^A \frac{1}{C} \cdot \frac{\lambda_a}{\lambda_a + \lambda_b} ds + \int_A^C \frac{1}{C} \cdot \frac{\lambda_b}{\lambda_a + \lambda_b} ds = \frac{[\lambda_a \cdot A + \lambda_b \cdot (C - A)]}{C \cdot \lambda_a + \lambda_b}$$

Entonces tendremos que:

$$P[N(C)_{NE} = k | N_T(C) = n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Es decir una distribución binomial de parámetros  $n$  y  $p$ .

5. (2,0 ptos) Es fácil ver que el costo total tiene sólo 2 componentes, una asociada a los autos que vienen por a y esperan, y la otra asociada a los autos que vienen por b y esperan.

Entonces (dado que en un ciclo la distribución de los autos que vienen por a y esperan es Poisson de tasa  $\lambda_a \cdot B$  y que de la misma forma, la distribución de los autos que vienen por b y esperan es Poisson de tasa  $\lambda_b \cdot A$ ) tendremos que:

$$\begin{aligned} E[\text{Costo ciclo}] &= E[\text{Autos por a}] + E[\text{Autos por b}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Autos por a} | N_a(B) = n] \cdot P[N_a(B) = n] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Autos por b} | N_b(A) = n] \cdot P[N_b(A) = n] \end{aligned}$$

Ahora, si un auto que llega por a, lo hace a  $s$  unidades de tiempo desde que se comenzó la luz roja, incurrirá en un costo igual a  $M \cdot (B - s)$ . Sin embargo dada la distribución uniforme de los tiempos de llegada de un Poisson uniforme, tendremos que este costo  $C$  será:

$$C = \int_0^B \frac{M \cdot (B - s)}{B} ds = \frac{M \cdot B}{2}$$

Es fácil ver que:

$$E[\text{Autos por a} | N_a(B) = n] = n \cdot \frac{M \cdot B}{2}$$

La misma lógica entrega el siguiente resultado para la calle b:

$$E[\text{Autos por a} | N_a(B) = n] = n \cdot \frac{M \cdot A^2}{3}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} E[\text{Costo ciclo}] &= \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Autos por a} | N_a(B) = n] \cdot P[N_a(B) = n] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{Autos por b} | N_b(A) = n] \cdot P[N_b(A) = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ n \cdot \frac{M \cdot B}{2} \right] \cdot P[N_a(B) = n] + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ n \cdot \frac{M \cdot A^2}{3} \right] \cdot P[N_b(A) = n] \\ &= \frac{\lambda_a \cdot M \cdot B^2}{2} + \frac{\lambda_b \cdot M \cdot A^3}{3} \end{aligned}$$

## Problema 2, CTP 3 Otoño 2005

1. La afirmación de los expertos es falsa. La propiedad de incrementos independientes de los procesos de Poisson nos garantiza que lo que ocurrirá en el resto del año, será independiente de lo ocurrido en el primer trimestre, por lo que no necesariamente la situación se tornará más crítica en lo que queda del año.
2. Se pide  $P[N_T(12) = N | N_T(3) = M]$ .  
Si  $N < M$  esta probabilidad es cero.  
Si  $N \geq 0$  se tiene:

$$\begin{aligned} P[N_T(12) = N | N_T(3) = M] &= \frac{P[N_T(12) = N \wedge N_T(3) = M]}{P[N_T(3) = M]} \\ &= \frac{P[N_T(9) = (N - M) \wedge N_T(3) = M]}{P[N_T(3) = M]} \\ &= \frac{P[N_T(9) = (N - M)] \cdot P[N_T(3) = M]}{P[N_T(3) = M]} \\ &= P[N_T(9) = (N - M)] \\ &= \frac{(\lambda \cdot 9)^{(N-M)} e^{-\lambda \cdot 9}}{(N - M)!} \end{aligned}$$

3. Nos remitimos a analizar el caso en que  $k \in \{1, \dots, 12\}$  (de lo contrario la probabilidad pedida es cero).

$$\begin{aligned}
P[N_A(1) = k | N_T(1) = 12] &= \frac{P[N_A(1) = k \wedge N_T(1) = 12]}{P[N_T(1) = 12]} \\
&= \frac{P[N_A(1) = k] \cdot P[N_B(1) = 12 - k]}{\frac{\lambda^{12} \cdot e^{-\lambda}}{12!}} \\
&= \frac{\frac{(\lambda p)^k \cdot e^{-\lambda p}}{k!} \cdot \frac{(\lambda(1-p))^{12-k} \cdot e^{-(\lambda(1-p))}}{(12-k)!}}{\frac{\lambda^{12} \cdot e^{-\lambda}}{12!}} \\
&= \binom{12}{k} p^k \cdot (1-p)^{12-k}
\end{aligned}$$

De resultados conocidos de procesos de Poisson filtrados, también era posible argumentar a priori que la probabilidad de que un recorte que ha ocurrido, con probabilidad  $p$  es de Clase A. Luego, la distribución de probabilidad del número de recortes de Clase A condicionado en que ha ocurrido un total de 12, sigue una distribución binomial de parámetros  $(12, p)$ .

4. Notamos que los costos totales de un mes son la suma de los costos asociados a los recortes Clase A y Clase B. De esta forma,

$$\begin{aligned}
E[\text{Costos}] &= E[\text{Costos Clase A}] + E[\text{Costos Clase B}] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E[\text{Costos Clase A} | N_A(1) = k] \cdot \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} E[\text{Costos Clase B} | N_B(1) = k] \cdot \frac{(\lambda(1-p))^k e^{-\lambda(1-p)}}{k!}
\end{aligned}$$

Pero en particular se tiene que:

$$\begin{aligned}
E[\text{Costos Clase A} | N_A(1) = k] &= C \cdot k \\
E[\text{Costos Clase B} | N_B(1) = k] &= \sum_{i=1}^k D_i
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
E[\text{Costos}] &= \sum_{k=0}^{\infty} C \cdot k \cdot \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k D_i \cdot \frac{(\lambda(1-p))^k e^{-\lambda(1-p)}}{k!} \\
&= C \cdot \lambda p + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k D_i \cdot \frac{(\lambda(1-p))^k e^{-\lambda(1-p)}}{k!}
\end{aligned}$$

Nota: para los costos asociados a los recortes Clase A es posible obtener el costo esperado multiplicando directamente el número esperado de eventos (que es  $\lambda p$ ) por el costo  $C$  pues el costo asociado a un evento de este tipo es independiente del número de eventos totales ocurridos. No así para los recortes Clase B, pues el costo asociado depende del número de eventos totales ocurridos en ese proceso.

5. Sea  $S_n$  el tiempo al que ocurre el  $n$ -ésimo recorte.

Se tiene la identidad:

$$S_n \leq t \Leftrightarrow N(t) \geq n$$

En este caso particular, nos preguntan por  $P[S_7 < 2]$ . Nótese que también se podía considerar la igualdad, sin afectar los resultados. Luego, aplicando la identidad:

$$\begin{aligned} P[S_7^A < 2] &= P[N_A(2) \geq 7] \\ &= \sum_{i=7}^{\infty} \frac{(\lambda p \cdot 2)^i e^{-\lambda p \cdot 2}}{i!} \end{aligned}$$

6. Sea  $R(t)$  el número de reuniones a que el presidente ha citado en un tiempo  $t$ . Nos piden calcular  $P[R(t) \geq n]$ . Definiendo  $S_n$  como el tiempo al que el presidente cita a la  $n$ -ésima reunión, se tiene la ya antes mencionada identidad:

$$P[R(t) \geq n] \Leftrightarrow P[S_n \leq t]$$

Notemos que  $S_n$  es la suma de  $3n$  v.a. i.i.d  $X_i$  exponenciales de parámetro  $\lambda$  más  $(n-1)t_r$ , donde  $t_r$  corresponde a  $\frac{1}{4}$  [meses].

Además, sabemos que:

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i \sim \text{Gamma}(3n, \lambda)$$

Luego,

$$\begin{aligned} P[R(t) \geq n] &= P[S_n \leq t] \\ &= P\left[\left(\sum_{i=1}^{3n} X_i\right) + \frac{n-1}{4} \leq t\right] \\ &= P\left[\sum_{i=1}^{3n} X_i \leq t - \frac{n-1}{4}\right] \\ &= \int_0^{t - \frac{n-1}{4}} \frac{\lambda^{3n} \cdot x^{3n-1} \cdot e^{-\lambda x}}{(3n-1)!} dx \end{aligned}$$