



## Auxiliar 9

Miercoles 22 de Abril de 2009

### Problema 1

1. Debemos recordar que la unidad de tiempo en esta pregunta son los partidos. Consideremos los siguientes procesos de conteo:

$N_A(t)$  Número de goles anotados por el equipo A hasta t

$N_B(t)$  Número de goles anotados por el equipo B hasta t

Entonces:

$$\begin{aligned} P[\text{A Gane } 2 \times 1 \text{ a B}] &= P[N_A(1) = 2 \wedge N_B(t) = 1] \\ &= P[N_A(1) = 2] \cdot P[N_B(t) = 1] \\ &= \frac{\lambda_A^2 e^{-\lambda_A}}{2!} \cdot \frac{\lambda_B e^{-\lambda_B}}{1!} \end{aligned}$$

Hemos utilizado la independencia de los procesos de conteo y la distribución de Poisson de estos.

2. De acuerdo a lo hecho en clases reinterpretemos esta probabilidad como sigue:

Sea:  $T_x$  el tiempo de llegada de uno de los goles y  $T_y$  el tiempo de llegada del otro gol. Sabemos que la distribución de estos tiempos es Uniforme entre 0 y  $\frac{1}{2}$  (revisar materia del curso). De esta forma la probabilidad que debemos calcular es (de acuerdo a la interpretación que acordamos en la clase auxiliar):

$$\begin{aligned} P[\text{Primer gol antes de 15 minutos y el segundo entre los 15 y los 30}] &= 2 \cdot P[T_X < \frac{1}{6} \wedge \frac{2}{6} > T_Y > \frac{1}{6}] \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

El 2 que antepone la probabilidad es porque debemos considerar en caso en que  $T_Y$  es menor que  $T_X$ .

3. Dado que los procesos de A y B son independientes, la probabilidad a calcular no es afectada por lo que pasa con B. Entonces:

$$\begin{aligned} P[\text{A hace 3 goles en los 30 primeros minutos del segundo tiempo}] &= P[N_A(\frac{5}{6}) - N_A(\frac{3}{6}) = 3] \\ &= P[N_A(\frac{3}{6}) = 3] \\ &= \frac{(\lambda_A \cdot \frac{1}{3})^3 \cdot e^{-\lambda_A \cdot \frac{1}{3}}}{3!} \end{aligned}$$

4. Consideramos el inicio del tiempo de alargue como un nuevo origen( incrementos estacionarios). Así, la probabilidad requerida es:

$$\begin{aligned} P[\text{Alargue dure más de 45 minutos}] &= P[N_A(\frac{1}{2}) = 0 \wedge N_B(\frac{1}{2}) = 0] \\ &= \frac{e^{-\lambda_A \frac{1}{2}}}{0!} \cdot \frac{e^{-\lambda_B \frac{1}{2}}}{0!} \\ &= e^{-(\lambda_A + \lambda_B) \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Notamos que esta probabilidad podría haber sido calculada de la siguiente forma: Si estamos al principio del alarge sabemos que el tiempo de llegada del primer gol sigue una distribución  $exp(\lambda_A + \lambda_B)$  (debido a que se trata de la distribución del mínimo de 2 exponenciales). Entonces solo debemos calcular la probabilidad que este tiempo sea mayor a  $\frac{1}{2}$ , que es el resultado obtenido.

5. Para calcular esta probabilidad debemos condicionar un par de veces. Sean:

BG = B gana.

1A = Primer gol es anotado por A.

1B = Primer gol es anotado por B.

2A = segundo gol es anotado por A.

2B = segundo gol es anotado por B.

Entonces:

$$\begin{aligned} P[BG] &= P[BG|1A] \cdot P[1A] + P[BG|1B] \cdot P[1B] \\ &= P[BG|1A] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + P[BG|1B] \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \end{aligned}$$

Pero:

$$\begin{aligned} P[BG|1A] &= P[BG|1A|2A] \cdot P[2A] + P[BG|1A|2B] \cdot P[2B] \\ &= P[BG|1A|2A] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + P[BG|1A|2B] \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \\ &= 0 \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + P[BG|1B] \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} P[BG|1B] &= P[BG|1B|2A] \cdot P[2A] + P[BG|1B|2B] \cdot P[2B] \\ &= P[BG|1B|2A] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + P[BG|1B|2B] \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \\ &= P[BG|1A] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + 1 \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \end{aligned}$$

Utilizando las relaciones encontradas vemos que:

$$\begin{aligned} P[BG|1A] &= \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \cdot [P[BG|1A] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + 1 \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}] \\ &= \frac{\lambda_B^2}{\lambda_A^2 + \lambda_B^2 + \lambda_A \cdot \lambda_B} \end{aligned}$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación de más arriba obtenemos:

$$P[BG] = \frac{\lambda_B^2}{\lambda_A^2 + \lambda_B^2 + \lambda_A \cdot \lambda_B} \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + \left[ \frac{\lambda_B^2}{\lambda_A^2 + \lambda_B^2 + \lambda_A \cdot \lambda_B} \right] \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} + 1 \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}$$

## Problema 2

1. Sea  $N_m$  = Número de personas que se suben al m-esimo bus. Sea  $x_m$  = tiempo entre llegada del bus m-1 y el m-esimo.

$$P(N_m = j | x_m = t) = \frac{e^{-\mu t} (\mu t)^j}{j!}$$

2. Tenemos que descondicionar el resultado de la parte anterior:

$$P(N_m = j) = \int_0^\infty P(N_m = j | x_m = t) \cdot f_{x_m}(t) \partial t$$

donde  $f_{x_m}(t)$  es la densidad del tiempo entre el bus m-1 y el m-esimo. Sin embargo sabemos que  $f_{x_m}(t) \rightarrow \exp(\lambda)$ . Entonces:

$$P(N_m = j) = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu t} (\mu t)^j}{j!} \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t$$
$$P(N_m = j) = \frac{\lambda \mu^j}{(\lambda + \mu)^{j+1}} \int_0^\infty \frac{(\lambda + \mu)^{j+1} t^j e^{-(\lambda + \mu)t}}{j!} \partial t$$

Dado que lo que queda dentro de la integral es la densidad de probabilidad de una  $Gamma(j + 1, \lambda + \mu)$  se tiene que:

$$P(N_m = j) = \frac{\lambda \mu^j}{(\lambda + \mu)^{j+1}}$$

3. Si un bus llega a las 10:30 y no llegan buses entre 10:30 y 11:00 el número de pasajeros que se subira al proximo bus será  $N_1 + N_2$  donde:

- $N_1$  = Número de personas que se sube entre 10:00 y 11:00.
- $N_2$  = Número de personas que se sube a partir de las 11:00.

Entonces:

$$P(N_m = n) = \sum_{j=0}^n P(N_1 = j \wedge N_2 = n - j)$$

$$P(N_m = n) = \sum_{j=0}^n P(N_1 = j) \cdot P(N_2 = n - j)$$

$$P(N_m = n) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-\frac{\mu}{2}} \sum_{j=0}^n \frac{\frac{\mu}{2}^j}{j!} \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-j}$$

$$P(N_m = n) = \frac{\lambda \mu^n}{(\lambda + \mu)^{n+1}} e^{-\frac{\mu}{2}} \sum_{j=0}^n \left[ \frac{\lambda + \mu}{2} \right]^j \cdot \frac{1}{j!}$$

## Problema 3

División de procesos de Poisson:

$N(t)$  = Número total de votantes que llegan hasta tiempo  $t$

$N_A(t)$  = Número total de votantes que llegan hasta tiempo  $t$  y votan por candidato  $A$

$N_B(t)$  = Número total de votantes que llegan hasta tiempo  $t$  y votan por candidato  $B$

$p$  = Probabilidad que un votante elija al candidato  $A$

$$\begin{aligned}
P[N_A(t) = n] &= \sum_{k=0}^{\infty} P[N_A(t) = n / N(t) = k] \cdot P[N(t) = k] \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} P[N_A(t) = n / N(t) = k] \cdot P[N(t) = k] \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!n!} p^n \cdot (1-p)^{k-n} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \\
&= \frac{+^n e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda t)^{k-n}}{(k-n)!}}_{e^{(1-p)\lambda t}} \\
&= \frac{e^{-\lambda p t} (\lambda p t)^n}{n!} \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda p)
\end{aligned}$$

Distribución condicional de los tiempos de llegada:

$X_1$  = Tiempo en que se produce la primera llegada, condicional a que de  $[0, t]$  hay una llegada

$$\begin{aligned}
P[X_1 \leq s / N(t) = 1] &= \frac{P[X_1 \leq s \wedge N(t) = 1]}{P[N(t) = 1]} \quad 0 \leq s \leq t \\
&= \frac{e^{-\lambda s} \lambda s e^{-\lambda(t-s)}}{e^{-\lambda t} \lambda t} = \frac{s}{t}
\end{aligned}$$

Luego, condicional a que hay una llegada en el intervalo  $[0, t]$  el tiempo en que esta ocurre sigue una distribución  $U[0, t]$ .

#### 1. Alternativa 1:

$$\begin{aligned}
P[N_A(10) = n / N(10) = 1000] &= \frac{P[N_A(10) = n \wedge N(10) = 1000]}{P[N(10) = 1000]} \\
&= \frac{P[N_A(10) = n] \cdot P[N_B(10) = 1000 - n]}{P[N(10) = 1000]} \\
&= \frac{\frac{e^{-\lambda_A \cdot 10} (\lambda_A \cdot 10)^n}{n!} \cdot \frac{e^{-\lambda_B \cdot 10} (\lambda_B \cdot 10)^{1000-n}}{(1000-n)!}}{\frac{e^{-\lambda \cdot 10} (\lambda \cdot 10)^{1000}}{1000!}} \\
&= \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{\lambda_A}{\lambda}\right)^n \left(\frac{\lambda_B}{\lambda}\right)^{1000-n} \\
&= \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} \quad n \geq 0
\end{aligned}$$

#### Alternativa 2:

Pensar directamente en una binomial. Si la probabilidad que c/u de los 1000 que llegaron, independiente de los demás, vote por el candidato  $A$  es  $p$ , tenemos que:

$$P[N_A(10) = n / N(10) = 1000] = \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot p^n (1-p)^{1000-n} = \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} \quad n \geq 0$$

2. Llamemos  $N_A^4$  al número de votantes del candidato  $A$  que llegan en las primeras 4 horas de votación.

**Alternativa 1:**

$$\begin{aligned}
P[N_A^4 = n / N(10) = 1000] &= \frac{P[N_A(4) = n \wedge N(6) + N_B(4) = 1000 - n]}{P[N(10) = 1000]} \\
&= \frac{P[N_A(4) = n] \cdot P[N^*(6) = 1000 - n]}{P[N(10) = 1000]} \\
\text{Donde } N^* &\rightsquigarrow \text{Poisson de tasa } \frac{4}{3}\lambda \\
&= \frac{\frac{(2\lambda)^n \cdot e^{-2\lambda}}{n!} \cdot \frac{(8\lambda)^{1000-n} \cdot e^{-8\lambda}}{(1000-n)!}}{\frac{(10\lambda)^{1000} \cdot e^{-10\lambda}}{1000!}} \\
&= \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^n \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{1000} \\
&= \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{1000-n}
\end{aligned}$$

Notar que si se consideran 2 procesos independientes  $N_1(t) \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda)$  y  $N_2(t) \rightsquigarrow \text{Poisson}(\frac{\lambda}{q})$  se tendrá que  $P[N_1(t) = k] = P[N_2(qt) = k]$ , por lo que es posible ajustar “el reloj” del proceso  $N_B(4)$  para sumarlo con  $N(6)$ .

**Alternativa 2:**

La probabilidad que una persona llegue en las primeras 4 horas y vote por el candidato  $A$ , dado que llegó en las primeras 10 será  $p = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$ . Con esto se tiene que

$$P[N_A^4 = n / N(t) = 1000] = \frac{1000!}{(1000-n)!n!} \left(\frac{1}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{1000-n}$$

3. Los votantes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa  $\lambda$ , por lo que si  $T$  es el tiempo en que llega el primer votante se tendrá:

$$P[T > t] = P[N(t) = 0] = e^{-\lambda t} \quad \text{Por lo que } T \rightsquigarrow \exp(\lambda)$$

De la misma manera, el tiempo  $T_A$  hasta que llega el primer votante tipo  $A$  sigue una exponencial de parámetro  $\frac{\lambda}{2}$ .

4. Llamaremos  $P[N_B^n]$  a la probabilidad que lleguen  $n$  votantes para el candidato  $B$  antes del primero para  $A$  y  $T_A$  al instante en que llega el primer votante para el candidato  $A$ .

**Alternativa 1:**

$$P[N_B^n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

**Alternativa 2:**

$$\begin{aligned}
P[N_B^n] &= \int_0^\infty P[N_B^n / T_A = t] f_{T_A}(t) dt \\
&= \int_0^\infty \frac{(\lambda_B t)^n e^{-\lambda_B t}}{n!} \cdot \lambda_A e^{-\lambda_A t} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{(\frac{\lambda}{2} t)^n e^{-\frac{\lambda}{2} t}}{n!} \cdot \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2} t} dt \\
&= \frac{(\frac{\lambda}{2})^{n+1}}{\lambda^{n+1}} \int_0^\infty \frac{t^n \lambda^{n+1} e^{-\lambda t}}{n!} dt = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}P[\text{Inversión}] &= P[\text{Inversión} / \text{Anterior vota A}] \cdot P[\text{Anterior vota A}] + \\&\quad P[\text{Inversión} / \text{Anterior vota B}] \cdot P[\text{Anterior vota B}] \\&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ahora tenemos un proceso de llegadas de votantes Poisson de tasa  $\lambda$  y si contamos el número de inversiones podemos notar que será el mismo proceso de Poisson “filtrado” por la probabilidad que una llegada sea una *inversión*. De esta manera el tiempo entre 2 *inversiones* consecutivas seguirá una distribución exponencial de tasa  $\lambda \cdot P[\text{Inversión}] = \frac{\lambda}{2}$ .